桑彦彬◎著

非线性算子方程与时间尺度上动力学方程中的拓扑和半序方法



俊雅集

Vernal Academic Elite Series

中国出版集团



世界图书出版公司

俊雅集 Vernal Academic Elite Series



ISBN 978-7-5100-7757-9

定价：32.00元

非线性算子方程与时间尺度上动力学方程中的拓扑和半序方法

桑彦彬◇著

世界图书出版公司
广州·上海·西安·北京

图书在版编目（CIP）数据

非线性算子方程与时间尺度上动力学方程中的拓扑和半序方法 / 桑彦彬著 . -- 广州 : 世界图书出版广东有限公司 , 2014.5
ISBN 978-7-5100-7757-9

Ⅰ . ①非… Ⅱ . ①桑… Ⅲ . ①非线性—算子方程—研究 Ⅳ . ① O177.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 098320 号

非线性算子方程与时间尺度上动力学方程中的拓扑和半序方法

责任编辑：廖才高　王梦洁
封面设计：谷风工作室
出版发行：世界图书出版广东有限公司
地　　址：广州市新港西路大江冲 25 号
电　　话：020-84459702
印　　刷：虎彩印艺股份有限公司
规　　格：787mm × 1092mm　1/16
印　　张：10.5
字　　数：100 千字
版　　次：2014 年 6 月第 1 版　2014 年 10 月第 2 次印刷
ISBN 978-7-5100-7757-9/O · 0043
定　　价：32.00 元

前 言

非线性算子理论是非线性泛函分析的重要组成部分之一, 这一理论不仅为非线性微分方程和积分方程的研究提供了有力的工具, 而且将其纳入到统一的框架之中. 从而在数学及应用科学诸如物理、工程、生物化学等领域都有着广泛的应用.

非线性算子方程的解的个数和类型问题一直为人们所关注, 本书首先研究了一类带次线性扰动的混合单调算子与一类较广泛的凹算子的不动点定理, 然后证明了两类非线性算子的多重不动点的存在性. 其次, 讨论了渐近线性算子方程的变号解与多重解. 最后, 集中展示了半序方法和拓扑度理论在时间尺度上二阶及高阶动力学方程中的应用.

第一章介绍了本书将用到的预备知识. 第一节, 给出了半序和锥的基本概念, 第二节介绍了有关时间尺度计算的基本结果, 第三节主要介绍了拓扑度和不动点指数的一些定义和相关引理.

在第二章中, 我们采用半序方法和单调迭代技巧研究以下算子方程的解的存在唯一性:

$$A(x,x)+Bx=x, \qquad x\in E,$$

其中 A 是混合单调算子, B 为次线性算子, 并且 E 是实的半序 Banach 空间. 应该指出, 我们不要求算子 A 具有耦合上下解条件与紧性以及连续性条件. 作为应用, 讨论了一类积分方程的正解的存在唯一性, 进而考察了一类时间尺度上的二阶边值问题, 不仅获得了其正解的存在唯一性, 而且也建立了逼近解的迭代格式.

在第三章中, 首先借助于不动点指数理论, 研究了在以下平行上下解条件

$$x_1<y_1,\ \ x_2<y_2,\ \ x_1\not\leq y_2,\ \ x_2\not\leq y_1,$$

$$x_1<Ax_1,\ \ Ay_1<y_1,\ \ x_2<Ax_2,\ \ Ay_2<y_2$$

下的非线性算子 A 的多重不动点. 进而将所获得的抽象结果应用于超线性 Hammerstein 型积分方程, 建立了其六个解的存在性结果.

其次, 将 τ-φ- 凹算子和 τ-φ- 凸算子结合起来, 考察了一类非线性算子的两个正不动点的存在性. 我们的工具基于正规锥的性质和序形式的锥拉伸与锥压缩不动点定理. 作为推论, 我们也获得了 φ_1- 凹算子与 φ_2- 凸算子之和的不动点定理. 最后, 将所得到的不动点定理应用于一类二阶微分方程的多点边值问题.

在第四章中, 首先, 在假定渐近线性算子 A 存在如下两对上下解

(i) 存在 $u_1 \in (-P)\backslash\{\theta\}$ 和 $v_1 \in P\backslash\{\theta\}$ 使得 $u_1 \leq Au_1$ 和 $Av_1 \leq v_1$;

(ii) 存在 $u_2 \in (-P)\backslash\{\theta\}$, $v_2 \in P\backslash\{\theta\}$, 与 $\delta > 0$ 使得 $u_1 < u_2 < \theta < v_2 < v_1$, $Au_2 \leq u_2 - \delta e$, $v_2 + \delta e \leq Av_2$

的前提下, 研究其多重不动点和变号不动点的存在性. 获得了两个正不动点与两个负不动点以及一个变号不动点的存在性结果. 进而, 若算子 A 为复合算子, 即算子 A 可以表示成 $A = KF$ 的形式, 这里 $F: E \longrightarrow E$ 为连续且有界的增算子, $K: E \longrightarrow E$ 为正线性全连续算子. 若 F 在 θ 点处 Fréchet 可微, 根据 A'_θ 的性质, 上述条件 (ii) 可通过以下条件来实现:

$(ii)'$ $F(\theta) = \theta$, 并且 KF'_θ 有一个特征值 $\lambda_0 < 1$, 对应的特征函数 ψ 满足 $\mu_1 e \leq \psi \leq \mu_2 e$, 其中 $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$.

对于一些具体问题, 条件 $(ii)'$ 是易于检验的.

其次, 借助于一个已知的拓扑度为 1 的结论, 利用可微映射与渐近线性算子的指数计算定理, 获得了非线性算子方程至少存在两个正解与两个负解以及两个变号解的抽象结果. 然后, 研究了格结构下单边渐近线性算子的变号解和多重解. 最后, 将所获得的结论应用于非线性 Hammerstein 型积分方程与一类偏微分方程的边值问题. 本章的工作不仅对相关的具体微分方程的条件进行了抽象, 获得了一般性的结果. 而且也对其进行了一定的改进, 使其具有了较广泛的意义.

本书前四章, 系作者博士论文的主要内容. 后四章的大部分结果已散见于作者近年来发表于国内外期刊的论文. 半序方法与拓扑度理论已在偏微分方程方面得到了广泛的应用, 限于作者的认识水平, 目前尚无法对这一领域展开研究. 但这是作者进一步努力的方向.

本书的出版得到了国家自然科学基金天元基金 (11226119) 与山西省教育厅高等学校科技创新项目的资助.

桑彦彬

山西太原中北大学

2014.1

目　录

第一章　预备知识

本章的目的是介绍与本书有直接关联的预备知识, 包括一些算子的基本概念与定义, 以及与之相应的一些定理. 第一节, 介绍了半序和锥的基本概念, 包括了向量格的概念及性质. 第二节, 主要讨论有关时间尺度的定义和一些计算公式. 第三节, 引入了拓扑度理论和不动点指数理论的一些概念与性质, 包括了正线性算子的 Krein-Rutman 理论.

§1.1　半序和锥

本节的内容选自文献 [1-4].

定义 1.1.1([1]) 设 X 是一个集合. 如果对 X 的某些元素对 x, y 之间, 可以定义一种二元关系, 记为 $x \leq y$, 具有下列性质:

(i) 对任给 $x \in X$, 都有 $x \leq x$;

(ii) 若 $x \leq y$, $y \leq x$, 则 $x = y$;

(iii) 若 $x \leq y$, $y \leq z$, 则 $x \leq z$.

则称 $\leq$ 是一种半序关系, X 在该半序下是一个半序集.

定义 1.1.2([1-3]) 设 E 是实 Banach 空间, P 是 E 中的非空凸闭集, 若 P 满足

(i) $x \in P$, $\lambda \geq 0 \Longrightarrow \lambda x \in P$;

(ii) $x \in P$, $-x \in P \Longrightarrow x = \theta$.

则称 P 是 E 中的一个锥.

给定 Banach 空间 E 中的一个锥 P 后, 可以在 E 中引入半序关系如下: $x \leq y$, 如果 $y - x \in P$. 易知 E 在该半序下成为一个半序集, 称 E 是半序 Banach 空间.

定义 1.1.3([1-3]) 设 P 是 Banach 空间 E 中的一个锥. 若 P 含有内点, 即 P 的内部 $P^\circ \neq \emptyset$, 则称 P 为一个体锥.

若 $x \leq y$ 并且 $x \neq y$, 则记 $x < y$; 若 P 是一个体锥, 并且 $y - x \in P^\circ$, 则记 $x \ll y$.

定义 1.1.4([1-3]) 设 P 是 E 中一个锥. 若存在常数 $N > 0$ 使得 $\theta \leq x \leq$

$y \Longrightarrow \|x\| \le N\|y\|$, 则称 P 是正规的. 正数 N 中的最小者叫做 P 的正规常数.

定义 1.1.5([1, 4]) 设 X 是一个半序集, $D \subset X$. 若存在 $z \in X$, 满足

(i) 对任给 $x \in D$, 都有 $x \le z$;

(ii) 若 $y \in X$ 满足 $x \le y, \forall\, x \in D$, 就有 $z \le y$.

则称 z 是 D 的上确界, 记为 $z = \sup D$. 类似地, 可定义下确界 $\inf D$.

定义 1.1.6([1, 4]) 设 X 是一个半序集, 若对任给 $x, y \in X$, 都存在 $\sup\{x, y\}$ 和 $\inf\{x, y\}$, 则称 X 是一个格. 若对任给按序有上界和下界的集合 $D \subset X$, 都存在 $\sup D$ 和 $\inf D$, 则称 X 是一个完备格.

如果 X 是一个格. 对任给 $x, y \in X$, 定义 $x \vee y$ 和 $x \wedge y$ 为

$$x \vee y = \sup\{x, y\}, \quad x \wedge y = \inf\{x, y\}.$$

定义 1.1.7([1, 4]) 设 E 是线性空间, 又是半序集. 如果半序结构与线性结构相容, 即对任给 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^1$, $\alpha \ge 0$, $\beta \ge 0$, $x_1, x_2, y_1, y_2 \in E$, $x_1 \le x_2$, $y_1 \le y_2$ 都有 $\alpha x_1 + \beta y_1 \le \alpha x_2 + \beta y_2$, 则称 E 为一个半序线性空间. 若 E 是一个半序线性空间, 并且在半序结构下是一个格, 则称 E 是一个向量格.

定义 1.1.8([1, 4]) 设 E 是一个向量格. 对 $x \in E$, 令

$$x^+ = x \vee \theta, \quad x^- = (-x) \vee \theta, \quad |x| = x \vee (-x).$$

则称 x^+ 是 x 的正部, x^- 是 x 的负部, $|x|$ 是 x 的模.

为了下文叙述的方便, 使用下列符号:

$$x_+ = x^+, \qquad x_- = -x^-.$$

于是

$$x = x_+ + x_-, \qquad |x| = x_+ - x_-.$$

引理 1.1.1([1, 4]) 设 E 为一个向量格, $x, y \in E$, 则

(i) $x^+ \ge \theta,\ x^- \ge \theta,\ x^+ = (-x)^-,\ x^- = (-x)^+,\ |x| = |-x|$;

(ii) $x = x^+ - x^-, \quad x^+ \wedge x^- = \theta$;

(iii) $|x| = x^+ + x^- \ge \theta$;

(iv) $\theta \le x^+ \le |x|, \quad \theta \le x^- \le |x|$;

(v) $-x^- \le x \le x^+$.

定义 1.1.9([1, 3]) 设 P 是 Banach 空间 E 中的一个锥. 如果 $E = P - P$, 即 E 中任何元素 x 均可表示为 $x = y - z$ 的形式, 其中 $y, z \in P$, 则称 P 为生成锥; 如果 $E = \overline{P - P}$, 则称 P 是完全锥.

§1.2 时间尺度的计算

有关时间尺度的概念与基本计算, 可参见 [5-7].

定义 1.2.1([5, 7]) 我们称实数集 $\mathbb{R}$ 的任意一个非空闭子集为时间尺度, 记为 $\mathbb{T}$. 对于 $t \in \mathbb{T}$, 分别定义向前跳跃算子 $\sigma : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}$ 和向后跳跃算子 $\rho : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}$ 如下:

$$\sigma(t) := \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\},$$

$$\rho(t) := \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}.$$

在此定义中, 令 $\inf \emptyset = \sup \mathbb{T}$(即若 $\mathbb{T}$ 有一个最大值 t, 则 $\sigma(t) = t$), $\sup \emptyset = \inf \mathbb{T}$(即若 $\mathbb{T}$ 有一个最小值 t, 则 $\rho(t) = t$), 这里 $\emptyset$ 表示空集. 若 $\sigma(t) > t$, 则称 t 为右稀疏; 若 $\rho(t) < t$, 则称 t 为左稀疏; 若 $t < \sup \mathbb{T}$ 且 $\sigma(t) = t$, 则称 t 为右稠密; 若 $t > \inf \mathbb{T}$ 且 $\rho(t) = t$, 则称 t 为左稠密. 若 $\mathbb{T}$ 有一个右稀疏的最小值 m, 定义 $\mathbb{T}_k = \mathbb{T} - \{m\}$, 否则令 $\mathbb{T}_k = \mathbb{T}$. 若 $\mathbb{T}$ 有一个左稀疏的最大值 M, 定义 $\mathbb{T}^k = \mathbb{T} - \{M\}$, 否则令 $\mathbb{T}^k = \mathbb{T}$.

定义 1.2.2([5, 6]) 对于 $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ 与 $t \in \mathbb{T}^k$, 若有 $f^{\Delta}(t) \in \mathbb{R}$, 对任给 $\epsilon > 0$, 存在 t 的一个邻域 U, 使得对所有的 $s \in U$, 都有

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)| \leq \epsilon|\sigma(t) - s|.$$

则称 f 在 t 点是 Δ- 可导的, 并称 $f^{\Delta}(t)$ 为 f 在 t 点的 Δ- 导数.

定义 1.2.3([7]) 对于 $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ 与 $t \in \mathbb{T}_k$, 若有 $f^{\nabla}(t) \in \mathbb{R}$, 对任给 $\epsilon > 0$, 存在 t 的一个邻域 U, 使得对所有的 $s \in U$, 都有

$$|f(\rho(t)) - f(s) - f^{\nabla}(t)(\rho(t) - s)| \leq \epsilon|\rho(t) - s|.$$

则称 f 在 t 点是 ∇- 可导的, 并称 $f^{\nabla}(t)$ 为 f 在 t 点的 ∇- 导数.

定义 1.2.4([5, 6]) 若对于所有 $t \in \mathbb{T}^k$, 有 $F^{\Delta}(t) = f(t)$. 定义 f 的 Δ- 积分如下:

$$\int_a^t f(s)\Delta s = F(t) - F(a), \quad t \in \mathbb{T}.$$

定义 1.2.5([7]) 若对于所有 $t \in \mathbb{T}_k$, 有 $\Phi^{\nabla}(t) = f(t)$. 定义 f 的 ∇- 积分如下:

$$\int_a^t f(s)\nabla s = \Phi(t) - \Phi(a), \quad t \in \mathbb{T}.$$

引理 1.2.1([7]) 令 $a, b \in \mathbb{T}$ 满足 $a \le b$. 令 $f(t)$ 是一个定义在 $[a,b]$ 上的连续函数. 则

(i) $\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^{\rho(b)} f(t)\Delta t + [b-\rho(b)]f(\rho(b))$;

(ii) $\int_a^b f(t)\Delta t = [\sigma(a)-a]f(a) + \int_{\sigma(a)}^b f(t)\Delta t$;

(iii) $\int_a^b f(t)\nabla t = \int_a^{\rho(b)} f(t)\nabla t + [b-\rho(b)]f(b)$;

(iv) $\int_a^b f(t)\nabla t = [\sigma(a)-a]f(\sigma(a)) + \int_{\sigma(a)}^b f(t)\nabla t$.

§1.3 拓扑度及不动点指数理论

定义 1.3.1([1, 2]) 设 E_1 和 E_2 是 Banach 空间, $D \subset E_1$, 算子 $A : D \longrightarrow E_2$. 若 A 将 D 中的任何有界集 S 都映成 E_2 中的相对紧集 (即它的闭包 $\overline{A(S)}$ 是 E_2 中的紧集), 则称 A 是映 D 入 E_2 的紧算子. 若算子是连续的, 又是紧算子, 则称 A 是全连续算子.

定义 1.3.2([1, 2]) 设 E 是一个拓扑空间, $X \subset E$. 若存在连续算子 $P : E \longrightarrow X$, 使得当 $x \in X$ 时恒有 $Px = x$, 则称 X 是 E 的一个收缩核, 算子 P 是一个保核收缩.

定义 1.3.3([1, 2]) 设 E 是 Banach 空间, S 是 E 中的有界集. 令

$$\alpha(S) = \inf\{\delta > 0 | S\text{是有限个直径} \le \delta\text{的集合之并}\},$$

则称 $\alpha(S)$ 是 S 的 Kuratowski 非紧性测度, 简称非紧性测度.

定义 1.3.4([1, 2]) 设 E 是 Banach 空间, $D \subset E$, $A : D \longrightarrow E$ 是连续算子. 若存在常数 $k \ge 0$, 使得对任何有界集 $S \subset D$, 都有

$$\alpha(A(S)) \le k\alpha(S),$$

则称 A 是 D 上的 k 集压缩算子; 特别地, $k<1$ 时的 k 集压缩算子称为严格集压缩算子; 若对任何非相对紧的有界集 $S\subset D$, 都有

$$\alpha(A(S))<\alpha(S),$$

则称 A 是 D 上的凝聚算子.

设 E 是 Banach 空间, X 是 E 中的一个收缩核, $U\subset X$ 是 X 中的有界相对开集 (即把 X 看成一个拓扑空间时, U 是 X 中的开集), $\overline{U}$ 和 ∂U 分别是 U 相对于 X 的闭包和边界.

定义 1.3.5([1, 2]) 设 X 是 Banach 空间 E 中的收缩核, $U\subset X$ 是 X 中的有界相对开集, $A:\overline{U}\longrightarrow X$ 全连续, 并且在 ∂U 上没有不动点. 令 $r:E\longrightarrow X$ 是一个保核收缩. 取 R 充分大, 使 $\overline{U}\subset T_R=\{x|x\in E,\ \|x\|<R\}$. 定义 A 在 U 上关于 X 的不动点指数如下:

$$i(A,U,X)=\deg(I-Ar,T_R\cap r^{-1}(U),\theta), \tag{1.3.1}$$

这里右端是 Leray-Schauder 度.

引理 1.3.1([1, 2]) 由 (1.3.1) 定义的收缩核上的不动点指数具有下列基本性质:

(i) 正规性: 若 $A:\overline{U}\longrightarrow U$ 是常算子 (即存在 $x_0\in U$, 使得 $Ax\equiv x_0$), 则 $i(A,U,X)=1$;

(ii) 可加性: 设 $U_1\subset U$ 和 $U_2\subset U$ 都是 X 中的相对开集, $U_1\cap U_2=\emptyset$, 并且 A 在 $\overline{U}\backslash(U_1\cup U_2)$ 上没有不动点, 则 $i(A,U,X)=i(A,U_1,X)+i(A,U_2,X)$;

(iii) 同伦不变性: 设 $H:[0,1]\times\overline{U}\longrightarrow X$ 全连续, 使得当 $(t,x)\in[0,1]\times\partial U$ 时, 恒有 $H(t,x)\neq x$, 则 $i(H(t,\cdot,),U,X)$ 与 $t\in[0,1]$ 无关;

(iv) 保持性: 若 Y 是 X 的收缩核, $A(\overline{U})\subset Y$, 则 $i(A,U,X)=i(A,U\cap Y,Y)$;

(v) 切除性: 若 V 是 X 中的相对开集, $V\subset U$, 且 A 在 $\overline{U}\backslash V$ 上没有不动点, 则 $i(A,U,X)=i(A,V,X)$;

(vi) 可解性: 若 $i(A,U,X)\neq 0$, 则 A 在 U 中至少有一个不动点;

(vii) 边界值性质: 设 $A,\ B:\overline{U}\longrightarrow X$ 全连续, 在 ∂U 上没有不动点, 并且 $Ax=Bx$, $x\in\ \partial U$, 则 $i(A,U,X)=i(B,U,X)$.

定义 1.3.6([1, 2]) 设 E_1 和 E_2 是 Banach 空间, D 是 E_1 中的开集, $A:D\longrightarrow E_2$, $x_0\in D$. 若存在有界线性算子 $B:E_1\longrightarrow E_2$, 使得

$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\|A(x_0+h)-Ax_0-Bh\|}{\|h\|}=0.$$

则称算子 A 在点 x_0 处是 Fréchet 可微的, B 叫做 A 在点 x_0 处的 Fréchet 导算子, 记为 A'_{x_0}.

引理 1.3.2([1, 2]) 设 $D \subset E_1$ 是开集, $A: D \longrightarrow E_2$ 是全连续算子, 并且在点 $x_0 \in D$ 处 Fréchet 可微, 则 $A'_{x_0}: E_1 \longrightarrow E_2$ 是全连续线性算子.

定义 1.3.7([1, 2]) 设 $A: D \longrightarrow E_2$, D 包含 E_1 中某球的外部 (即存在 $R > 0$, 使得 $\forall\, x \in E_1$, $\|x\| > R$ 都有 $x \in D$). 若存在有界线性算子 $B: E_1 \longrightarrow E_2$, 使得

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} \frac{\|Ax - Bx\|}{\|x\|} = 0,$$

则称算子 A 在无穷远 ∞ 处 Fréchet 可微, B 叫做 A 在 ∞ 处的 Fréchet 导算子, 记为 A'_∞, 即 $A'_\infty = B$. 当 A'_∞ 存在时, 称 A 为渐近线性算子.

引理 1.3.3([1, 2]) 若 $A: D \longrightarrow E_2$ 是全连续的渐近线性算子, 则 $A'_\infty: E_1 \longrightarrow E_2$ 是全连续线性算子.

定义 1.3.8([1]) 设 Ω 是 Banach 空间 E 中的开集, $A: \overline{\Omega} \longrightarrow E$ 全连续, $f = I - A$, $x_0 \in \Omega$ 是 f 在 Ω 中的孤立零点, 即存在 $r > 0$, 使得 $T_r = \{x | \, \|x - x_0\| < r\} \subset \Omega$, 并且 x_0 是 f 在 $\overline{T}_r$ 中唯一的零点 (即 A 唯一不动点). 定义

$$\operatorname{ind}(I - A, x_0) = \deg(I - A, T_r, \theta)$$

并称 $\operatorname{ind}(I - A, x_0)$ 为 $I - A$ 在零点 x_0 处的指数.

定义 1.3.9([1]) 设 $A: E \longrightarrow E$ 全连续, 并存在 $R > 0$, 使得对任给 $x \in E$, $\|x\| \geq R$, 都有 $Ax \neq x$. 定义

$$\operatorname{ind}(I - A, \infty) = \deg(I - A, T_R, \theta),$$

并称 $\operatorname{ind}(I - A, \infty)$ 为 $I - A$ 在 ∞ 处的指数.

设 E 为 Banach 空间, P 为 E 中的正锥, $A: E \longrightarrow E$. 若 $x \in P$ 满足算子方程

$$x = Ax, \tag{1.3.2}$$

则称 x 为算子方程 (1.3.2) 的正解; 若 $x \in -P$ 满足 (1.3.2), 则称 x 为 (1.3.2) 的负解; 若 $x \in E \backslash (P \cup (-P))$ 满足 (1.3.2), 则称 x 为 (1.3.2) 的变号解.

若 $x_0 \in E \backslash \{\theta\}$ 满足 $\lambda A x_0 = x_0$, 其中 λ 是某实数, 则称 λ 是 A 的特征值, x_0 是 A 的属于特征值 λ 的特征函数.

设 E 是 Banach 空间, P 是 E 中的一个锥, $B: E \longrightarrow E$ 是正线性算子, 即 $B(P) \subset P$.

引理 1.3.4([1, 8]) 设 P 是 Banach 空间 E 中的生成锥, B 是 E 上正的全连续线性算子, 并且谱半径 $r(B) > 0$, 则 B 必定存在正特征元属于 $P \backslash \{\theta\}$, 对应的特征值是 $r^{-1}(B)$, 这里 $r^{-1}(B) = (r(B))^{-1}$.

定义 1.3.10([9]) 令 $A: D \longrightarrow E$ 是一个算子, $e \in P \backslash \{\theta\}$, 且 $x_0 \in D$. 若对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, 使得对所有的 $x \in D$ 及 $\|x - x_0\| < \delta$, 都有

$$-\epsilon e \leq Ax - Ax_0 \leq \epsilon e.$$

则称 A 在 x_0 处 e- 连续. 若 A 在 D 上的每一点都 e- 连续, 则称 A 在 D 上 e- 连续.

第二章　一类带扰动的混合单调算子的不动点定理及其应用

§2.1　引言

1987 年, 郭大钧先生和 Lakshmikantham 教授在文 [10] 中首次提出了混合单调算子的概念, 该概念不仅可直接应用于数学领域, 统一增算子和减算子的结论, 而且可应用于工程、生物化学、核工业等学科抽象出来的非线性方程 [3, 10-19].

近年来, 带有扰动的非线性算子的不动点理论获得了一些进展. 文 [13] 证明了算子 $A=B+C$ 的正不动点的存在唯一性与迭代收敛性, 其中 B 是一个正线性算子, 且谱半径 $r(B)<1$, C 是一个 φ- 凹增算子. 文 [14] 获得了算子 $C=A+B$ 的正不动点的存在性和唯一性, 其中 A 是减算子, B 是一个次线性算子. 进一步, 文 [15] 借助于半序方法、锥理论以及迭代技巧, 研究了序 Banach 空间 E 中的算子方程 $A(x,x)+Bx=x$ 的解的存在唯一性, 其中 A 是带凹凸型的混合单调算子, 且 B 是一个仿射算子. 其主要结果为:

定理 2.1.1([15])　设 P 是 E 中的正规锥, N 为 P 的正规常数, $u,\ v\in P\cap\mathcal{D}(B)$, $u<v$, 算子 $A:[u,v]\times[u,v]\longrightarrow E$ 是混合单调算子, 且 $B:\mathcal{D}(B)\longrightarrow E$ 为 $[u,v]$ 上的仿射算子, 即

$$B(tx+(1-t)y)=tBx+(1-t)By,\quad x,\ y\in[u,v],\quad t\in[0,1].$$

我们还假设

(i) 对固定的 y, 算子 $A(\cdot,y):[u,v]\longrightarrow E$ 是凹的; 而对固定的 x, $A(x,\cdot):[u,v]\longrightarrow E$ 是凸算子;

(ii) $(I-B)^{-1}:E\longrightarrow\mathcal{D}(B)$ 存在且在 $[u-Bu,v-Bv]$ 上为增算子;

(iii) $A(u,v)\geq u$, $A(v,u)\leq v$, $Bu\geq\theta$, $Bv\leq\theta$;

(iv) 存在 $m_0\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ 使得

$$u_{m_0+1}\geq\frac{1}{2}(v_{m_0+1}+u_{m_0}),$$

这里

$$u_0=u,\qquad v_0=v,$$

$$u_n=(I-B)^{-1}A(u_{n-1},v_{n-1}),\qquad v_n=(I-B)^{-1}A(v_{n-1},u_{n-1}),\ n=1,2,\cdots,$$

则方程 $A(x,x)+Bx=x$ 在 $[u,v]$ 中有唯一正解 x^*, 且对以 $(x_0,y_0)\in[u,v]\times[u,v]$ 为初值的迭代序列

$$x_n=(I-B)^{-1}A(x_{n-1},y_{n-1}),\quad y_n=(I-B)^{-1}A(y_{n-1},x_{n-1}),\ n=1,2,\cdots,$$

我们有

$$x_n\longrightarrow x^*,\qquad y_n\longrightarrow x^*,\ \ n\longrightarrow\infty,$$

及收敛速率

$$\|x_{m_0+n}-x^*\|\le\frac{2N^2}{n+1}\|v-u\|,\ \ \|y_{m_0+n}-x^*\|\le\frac{2N^2}{n+1}\|v-u\|,n=1,2,\cdots.$$

文 [17] 建立了一类带有次线性扰动的混合单调算子的不动点定理.

另一方面, 注意到在获取混合单调算子的结果时, 上下解条件通常起着重要的作用, 参见定理 2.1.1 中的条件 (iii). 然而对于具体的非线性方程而言, 此条件并不容易验证. 因此, 如何解除上述条件是一个有趣而令人感兴趣的课题, 有众多学者致力于这一问题. 在不假定上下解存在的前提下, 文 [20] 证明了 τ-φ- 凹算子的不动点的存在唯一性与迭代收敛性. 进一步, 文 [21] 在序 Banach 空间中考虑了一类非线性算子方程 $x=Ax+x_0$, 其中 A 是一个单调的广义凹算子. 特别地, 作者并未假定上下解条件的存在性.

贯穿本章, E 是赋予范数 $\|\cdot\|$ 的实 Banach 空间, P 是 E 中的锥, θ 是 E 中的零元, $P^+=P\backslash\{\theta\}$. 在 E 中引入半序关系如下: $x\le y$ 如果 $y-x\in P$. 称 $A:P\times P\longrightarrow P$ 是混合单调算子, 若 $A(x,y)$ 关于 x 是增的, 且关于 y 是减的, 即: $u_i,\ v_i\ (i=1,2)\in P,\ u_1\le u_2,\ v_1\ge v_2$ 蕴含着 $A(u_1,v_1)\le A(u_2,v_2)$. 若 $A(x,x)=x$, 则 $x\in P$ 称为 A 的不动点.

对于所有的 $x,\ y\in E$, 记号 $x\sim y$ 意味着存在 $\lambda>0$ 及 $\mu>0$ 使得 $\lambda x\le y\le\mu x$. 显然, $\sim$ 是一个等价关系. 给定 $h>\theta$ (即 $h\ge\theta$ 且 $h\ne\theta$), 我们用 P_h 表示集合 $P_h=\{x\in E\mid x\sim h\}$. 容易看到 $P_h\subset P$ 是凸集并且对于所有的 $\lambda>0$, 有 $\lambda P_h=P_h$. 若 $P^\circ\ne\emptyset$ 且 $h\in P^\circ$, 易见 $P_h=P^\circ$.

算子 $B:E\longrightarrow E$ 被称为次线性算子, 若 $B(sx)\le sBx,\ x\in P,\ s\ge1$.

以上讨论的概念及定义可参见 [3, 10, 12]. 关于混合单调算子的较新的一些结果及相关的论述, 可参见 [11, 18, 19, 22]. 最近, 文 [19] 引入了以下 h- 凹凸算子的概念:

定义 2.1.1([19]) 令算子 $A:P_h\times P_h\longrightarrow P_h$ 且 $h\in P^+$. 设存在 $\eta(u,v,t)>0$

使得

$$A(tu,t^{-1}v)\geq t(1+\eta(u,v,t))A(u,v),\quad \forall\, u,\ v\in P_h \ \text{且}\ 0<t<1.$$

则 A 是一个 h- 凹凸算子.

在不假定耦合上下解存在的前提下, 作者证明了如下定理:

定理 2.1.2([19]) 设 P 是实 Banach 空间 E 中的一个正规锥, $h\in P^{+}$, $A: P_h\times P_h\longrightarrow P_h$ 是一个混合单调及 h- 凹凸算子. 假设以下条件之一成立:

(A_1) 对于任意的 $t\in(0,1)$, $\eta(u,v,t)$ 关于 $u\in P_h$ 非增, 关于 $v\in P_h$ 非减;

(A_2) 对于任意的 $t\in(0,1)$, $\eta(u,v,t)$ 关于 $u\in P_h$ 非减, 关于 $v\in P_h$ 非增, 并且存在 $x_0,\ y_0\in P_h$, 且 $x_0\leq y_0$ 使得 $\overline{\lim}_{t\to 0^+}\eta(x_0,y_0,t)=+\infty$.

则 A 有唯一的不动点 x^*. 进而, 作迭代序列

$$x_n=A(x_{n-1},y_{n-1}),\quad y_n=A(y_{n-1},x_{n-1}),\ n=1,2,\cdots,$$

对于任意的初值 $x_0,\ y_0\in P_h$, 当 $n\longrightarrow\infty$ 时, 有 $\|x_n-x^*\|\longrightarrow 0$ 且 $\|y_n-x^*\|\longrightarrow 0$.

在本章中, 我们借助于半序理论和单调迭代技巧, 获得了以下算子方程

$$A(x,x)+Bx=x,\qquad x\in E, \tag{2.1.1}$$

的解的存在与唯一性, 其中 A 是混合单调算子, B 是次线性的, 并且 E 是实的半序 Banach 空间. 我们对所讨论的算子 A 不要求耦合上下解的存在性. 最后, 将抽象结果应用于非线性积分方程以及时间尺度上的二阶边值问题, 获得了其解的存在唯一性与迭代收敛性.

§2.2 抽象定理

我们的结果为以下定理:

定理 2.2.1 令 P 是实 Banach 空间 E 中的正规锥, 且 $A:P\times P\longrightarrow P$ 是混合单调算子. 令 $B:E\longrightarrow E$ 是次线性的. 假设对于所有的 $a<t<b$, 存在区间 (a,b) 上的两个正值函数 $\tau(t)$ 和 $\varphi(t,x,y)$ 使得

(H_1) $\tau:(a,b)\longrightarrow(0,1)$ 是一个满射;

(H_2) $\varphi(t,x,y)>\tau(t),\quad \forall\, t\in(a,b),\ x,\ y\in P$;

(H_3) $A\left(\tau(t)x, \frac{1}{\tau(t)}y\right) \geq \varphi(t,x,y)A(x,y), \quad \forall\, t \in (a,b),\ x,\ y \in P$;

(H_4) $(I-B)^{-1}: E \longrightarrow E$ 存在并且是增算子.

对于任给的 $t \in (a,b)$, 当固定 y 时, $\varphi(t,x,y)$ 关于 x 是非减的; 当固定 x 时, 关于 y 是非增的. 此外, 假设存在 $h \in P\backslash\{\theta\}$ 且 $t_0 \in (a,b)$ 使得

$$\frac{\tau(t_0)}{\varphi(t_0,h,h)}h \leq (I-B)^{-1}A(h,h) \leq \frac{1}{\tau(t_0)}h. \tag{2.2.1}$$

则

(i) 存在 $u_0,\ v_0 \in P_h$ 且 $r \in (0,1)$ 使得 $rv_0 \leq u_0 \leq v_0$, $u_0 \leq (I-B)^{-1}A(u_0,v_0) \leq (I-B)^{-1}A(v_0,u_0) \leq v_0$;

(ii) 方程 (2.1.1) 在 $[u_0,v_0]$ 中有唯一解 x^*;

(iii) 对于任意的初值 $x_0,\ y_0 \in P_h$, 作迭代序列

$$x_n = (I-B)^{-1}A(x_{n-1},y_{n-1}), \quad y_n = (I-B)^{-1}A(y_{n-1},x_{n-1}), \ n = 1,2,\cdots,$$

当 $n \longrightarrow \infty$ 时, 我们有 $\|x_n - x^*\| \longrightarrow 0$ 且 $\|y_n - x^*\| \longrightarrow 0$.

定理 2.2.2 令 P 是实 Banach 空间 E 中的正规锥, 且 $A: P\times P \longrightarrow P$ 是混合单调算子. 令 $B: E \longrightarrow E$ 是次线性的. 假设对于所有的 $a<t<b$, 存在区间 (a,b) 上的两个正值函数 $\tau(t)$, $\varphi(t,x,y)$ 使得定理 2.2.1 中的性质 (H_1)-(H_4) 满足. 对于任给的 $t \in (a,b)$, 固定 y 时, $\varphi(t,x,y)$ 关于 x 非增; 固定 x 时, 关于 y 非减. 此外, 假定存在 $h \in P\backslash\{\theta\}$ 和 $t_0 \in (a,b)$ 使得

$$\tau(t_0)h \leq (I-B)^{-1}A(h,h) \leq \frac{\varphi\left(t_0, \frac{h}{\tau(t_0)}, \tau(t_0)h\right)}{\tau(t_0)}h. \tag{2.2.2}$$

则定理 2.2.1 中的结论 (i), (ii) 及 (iii) 均成立.

定理 2.2.1 的证明 为方便起见, 我们定义 $C=(I-B)^{-1}A$. 由算子 B 是次线性算子可得 $B\theta \geq \theta$, 结合 (H_4), 我们有

$$\theta \leq (I-B)^{-1}\theta \leq (I-B)^{-1}x, \quad x \in P.$$

故 $(I-B)^{-1}$ 是一个正算子. 因此, 我们有 $C: P\times P \longrightarrow P$. 根据条件 (H_4), 我们知道 C 是混合单调的.

既然 B 是次线性的, 可得对于任意给定的 $x \in P$ 及 $\alpha \in (0,1)$, 有

$$(I-B)(\alpha x) \leq \alpha(I-B)x.$$

从而

$$(I-B)(\alpha(I-B)^{-1}x)\leq\alpha(I-B)(I-B)^{-1}x=\alpha x,$$

即

$$(I-B)(\alpha(I-B)^{-1}x)\leq\alpha x.$$

因此, 我们有

$$\alpha(I-B)^{-1}x\leq(I-B)^{-1}(\alpha x).\tag{2.2.3}$$

对于任意给定的 $t\in(a,b)$, 由条件 (H_1)-(H_4) 及 (2.2.3), 可得

$$\begin{aligned}C\left(\tau(t)x,\tfrac{1}{\tau(t)}y\right)&=(I-B)^{-1}A\left(\tau(t)x,\tfrac{1}{\tau(t)}y\right)\\&\geq(I-B)^{-1}\varphi(t,x,y)A(x,y)\\&\geq\varphi(t,x,y)(I-B)^{-1}A(x,y)\\&=\varphi(t,x,y)C(x,y).\end{aligned}\tag{2.2.4}$$

既然 $\tau(t_0)<\varphi(t_0,h,h)$, 我们能取一个正整数 k 使得

$$\left(\frac{\varphi(t_0,h,h)}{\tau(t_0)}\right)^k\geq\frac{1}{\tau(t_0)}.\tag{2.2.5}$$

令 $u_0=[\tau(t_0)]^kh,\ v_0=\frac{1}{[\tau(t_0)]^k}h$, 并且作迭代序列

$$u_n=C(u_{n-1},v_{n-1}),\ v_n=C(v_{n-1},u_{n-1}),\ n=1,2,\cdots.$$

显然, $u_0,\ v_0\in P_h$ 且 $u_0<v_0$, $u_1=C(u_0,v_0)\leq C(v_0,u_0)=v_1$. 一般地, 可得 $u_n\leq v_n$, $n=1,2,\cdots$. 注意到 $\varphi(t,x,y)>\tau(t)$, $\forall\ t\in(a,b)$, $x,\ y\in P$. 结合 (2.2.1) 与 (2.2.4), 有

$$\begin{aligned}u_1&=C(u_0,v_0)=C\left([\tau(t_0)]^kh,\tfrac{h}{[\tau(t_0)]^k}\right)\\&=C\left(\tau(t_0)[\tau(t_0)]^{k-1}h,\tfrac{1}{\tau(t_0)}\tfrac{h}{[\tau(t_0)]^{k-1}}\right)\\&\geq\varphi\left(t_0,[\tau(t_0)]^{k-1}h,\tfrac{h}{[\tau(t_0)]^{k-1}}\right)C\left([\tau(t_0)]^{k-1}h,\tfrac{h}{[\tau(t_0)]^{k-1}}\right)\\&=\varphi\left(t_0,[\tau(t_0)]^{k-1}h,\tfrac{h}{[\tau(t_0)]^{k-1}}\right)C\left(\tau(t_0)[\tau(t_0)]^{k-2}h,\tfrac{1}{\tau(t_0)}\tfrac{h}{[\tau(t_0)]^{k-2}}\right)\\&\geq\varphi\left(t_0,[\tau(t_0)]^{k-1}h,\tfrac{h}{[\tau(t_0)]^{k-1}}\right)\varphi\left(t_0,[\tau(t_0)]^{k-2}h,\tfrac{h}{[\tau(t_0)]^{k-2}}\right)C\left([\tau(t_0)]^{k-2}h,\right.\\&\quad\left.\tfrac{h}{[\tau(t_0)]^{k-2}}\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \cdots \geq \varphi\left(t_0, [\tau(t_0)]^{k-1}h, \tfrac{h}{[\tau(t_0)]^{k-1}}\right)\varphi\left(t_0, [\tau(t_0)]^{k-2}h, \tfrac{h}{[\tau(t_0)]^{k-2}}\right)\cdots \\
&\varphi(t_0, h, h)C(h, h) \\
&\geq [\tau(t_0)]^{k-1}\varphi(t_0, h, h)C(h, h) \\
&\geq [\tau(t_0)]^k h = u_0.
\end{aligned}
$$

由 (2.2.4), 可得

$$
C\left(\frac{x}{\tau(t)}, \tau(t)y\right) \leq \frac{1}{\varphi\left(t, \frac{x}{\tau(t)}, \tau(t)y\right)}C(x, y), \quad \forall\, t \in (a, b), \quad x,\ y \in P. \tag{2.2.6}
$$

注意到 $\varphi(t, x, y)$ 关于 x 是非减的, 且关于 y 是非增的, 由 (2.2.1), (2.2.5) 及 (2.2.6), 可得

$$
\begin{aligned}
v_1 &= C(v_0, u_0) = C\left(\tfrac{h}{[\tau(t_0)]^k}, [\tau(t_0)]^k h\right) \\
&= C\left(\tfrac{1}{\tau(t_0)}\tfrac{h}{[\tau(t_0)]^{k-1}}, \tau(t_0)[\tau(t_0)]^{k-1}h\right) \\
&\leq \frac{1}{\varphi\left(t_0, \frac{h}{[\tau(t_0)]^k}, [\tau(t_0)]^k h\right)}C\left(\tfrac{h}{[\tau(t_0)]^{k-1}}, [\tau(t_0)]^{k-1}h\right) \\
&= \frac{1}{\varphi\left(t_0, \frac{h}{[\tau(t_0)]^k}, [\tau(t_0)]^k h\right)}C\left(\tfrac{1}{\tau(t_0)}\tfrac{h}{[\tau(t_0)]^{k-2}}, \tau(t_0)[\tau(t_0)]^{k-2}h\right) \\
&\leq \frac{1}{\varphi\left(t_0, \frac{h}{[\tau(t_0)]^k}, [\tau(t_0)]^k h\right)}\frac{1}{\varphi\left(t_0, \frac{h}{[\tau(t_0)]^{k-1}}, [\tau(t_0)]^{k-1}h\right)}C\left(\tfrac{h}{[\tau(t_0)]^{k-2}}, [\tau(t_0)]^{k-2}h\right) \\
&\leq \cdots \\
&\leq \frac{1}{\varphi\left(t_0, \frac{h}{[\tau(t_0)]^k}, [\tau(t_0)]^k h\right)}\frac{1}{\varphi\left(t_0, \frac{h}{[\tau(t_0)]^{k-1}}, [\tau(t_0)]^{k-1}h\right)}\cdots\frac{1}{\varphi\left(t_0, \frac{h}{\tau(t_0)}, \tau(t_0)h\right)}C(h, h) \\
&< \tfrac{1}{[\varphi(t_0,h,h)]^k}\tfrac{h}{\tau(t_0)} \\
&\leq \tfrac{1}{[\tau(t_0)]^k}h = v_0.
\end{aligned}
$$

于是, 我们得到

$$
u_0 \leq u_1 \leq v_1 \leq v_0. \tag{2.2.7}
$$

依此类推, 容易获得

$$
u_0 \leq u_1 \leq \cdots \leq u_n \leq \cdots \leq v_n \leq \cdots \leq v_1 \leq v_0.
$$

取任意的 $r \in (0, [\tau(t_0)]^{2k})$, 那么 $r \in (0, 1)$ 且 $u_0 \geq rv_0$. 这样, 我们可知

$$
u_n \geq u_0 \geq rv_0 \geq rv_n, \quad n = 1, 2, \cdots.
$$

令

$$r_n=\sup\{r>0|u_n\geq rv_n\},\quad n=1,2,\cdots.$$

故我们有 $u_n\geq r_nv_n$, $n=1,2,\cdots$, 从而

$$u_{n+1}\geq u_n\geq r_nv_n\geq r_nv_{n+1},\quad n=1,2,\cdots.$$

因此, $r_{n+1}\geq r_n$, 即

$$0<r_0\leq r_1\leq\cdots\leq r_n\leq\cdots\leq 1.$$

令 $r^*=\lim\limits_{n\to\infty}r_n$, 我们将证明 $r^*=1$. 事实上, 若 $0<r^*<1$, 由 (H_1) 可得, 存在 $t_1\in(a,b)$ 使得 $\tau(t_1)=r^*$. 考虑以下两种情形:

(i) 存在一个整数 N 使得 $r_N=r^*$. 在此种情形下, 对于所有的 $n\geq N$, 均有 $r_n=r^*$ 且 $u_n\geq r^*v_n$. 进而

$$\begin{aligned}u_{n+1}&=C(u_n,v_n)\geq C\left(r^*v_n,\tfrac{1}{r^*}u_n\right)=C\left(\tau(t_1)v_n,\tfrac{1}{\tau(t_1)}u_n\right)\\&\geq\varphi(t_1,v_n,u_n)C(v_n,u_n)\geq\varphi(t_1,u_0,v_0)C(v_n,u_n)\\&=\varphi(t_1,u_0,v_0)v_{n+1},\quad n\geq N.\end{aligned}$$

根据 r_n 的定义, 我们有

$$r_{n+1}=r^*\geq\varphi(t_1,u_0,v_0)>\tau(t_1)=r^*,\quad n\geq N,$$

这是一个矛盾.

(ii) 对于所有的整数 n, $r_n<r^*$, 我们有 $0<\frac{r_n}{r^*}<1$. 从条件 (H_1) 可知, 存在 $z_n\in(a,b)$ 使得 $\tau(z_n)=\frac{r_n}{r^*}$. 于是

$$\begin{aligned}u_{n+1}&=C(u_n,v_n)\geq C\left(r_nv_n,\tfrac{1}{r_n}u_n\right)=C\left(\tfrac{r_n}{r^*}r^*v_n,\tfrac{1}{\frac{r_n}{r^*}r^*}u_n\right)\\&=C\left(\tau(z_n)r^*v_n,\tfrac{1}{\tau(z_n)r^*}u_n\right)\geq\varphi\left(z_n,r^*v_n,\tfrac{1}{r^*}u_n\right)C\left(r^*v_n,\tfrac{1}{r^*}u_n\right)\\&\geq\varphi\left(z_n,r^*u_0,\tfrac{1}{r^*}v_0\right)C\left(\tau(t_1)v_n,\tfrac{1}{\tau(t_1)}u_n\right)\\&\geq\varphi\left(z_n,r^*u_0,\tfrac{1}{r^*}v_0\right)\varphi(t_1,v_n,u_n)C(v_n,u_n)\\&\geq\varphi\left(z_n,r^*u_0,\tfrac{1}{r^*}v_0\right)\varphi(t_1,u_0,v_0)v_{n+1}.\end{aligned}$$

由 r_n 的定义, 我们有

$$r_{n+1}\geq\varphi\left(z_n,r^*u_0,\frac{1}{r^*}v_0\right)\varphi(t_1,u_0,v_0)>\tau(z_n)\varphi(t_1,u_0,v_0)=\frac{r_n}{r^*}\varphi(t_1,u_0,v_0).$$

令 $n \longrightarrow \infty$, 有

$$r^* \geq \varphi(t_1, u_0, v_0) > \tau(t_1) = r^*,$$

这也是一个矛盾. 故 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 1$.

进一步, 与文献 [20] 中的定理 2.1 的证明相似, 存在 $x^* \in [u_0, v_0]$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = x^*$, 并且 x^* 是算子 C 的不动点.

接下来, 我们证明 x^* 是算子 C 在 P_h 中的唯一不动点. 事实上, 假设 $x_* \in P_h$ 是算子 C 的另一个不动点. 令

$$c_1 = \sup\left\{0 < c \leq 1 \;\middle|\; cx_* \leq x^* \leq \frac{1}{c}x_*\right\}.$$

显然, $0 < c_1 \leq 1$ 且 $c_1 x_* \leq x^* \leq \frac{1}{c_1}x_*$. 若 $0 < c_1 < 1$, 由条件 (H_1) 可得, 存在 $t_2 \in (a, b)$ 使得 $\tau(t_2) = c_1$. 那么

$$\begin{aligned} x^* &= C(x^*, x^*) \geq C\left(c_1 x_*, \tfrac{1}{c_1}x_*\right) = C\left(\tau(t_2)x_*, \tfrac{1}{\tau(t_2)}x_*\right) \\ &\geq \varphi(t_2, x_*, x_*)C(x_*, x_*) = \varphi(t_2, x_*, x_*)x_*, \end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned} x^* &= C(x^*, x^*) \leq C\left(\tfrac{1}{c_1}x_*, c_1 x_*\right) = C\left(\tfrac{1}{\tau(t_2)}x_*, \tau(t_2)x_*\right) \\ &\leq \frac{1}{\varphi\left(t_2, \frac{x_*}{\tau(t_2)}, \tau(t_2)x_*\right)}C(x_*, x_*) = \frac{1}{\varphi\left(t_2, \frac{x_*}{\tau(t_2)}, \tau(t_2)x_*\right)}x_*. \end{aligned}$$

既然

$$\varphi(t_2, x_*, x_*) \leq \varphi\left(t_2, \frac{x_*}{\tau(t_2)}, \tau(t_2)x_*\right),$$

我们有

$$\varphi(t_2, x_*, x_*)x_* \leq x^* \leq \frac{1}{\varphi(t_2, x_*, x_*)}x_*.$$

进而, $c_1 \geq \varphi(t_2, x_*, x_*) > \tau(t_2) = c_1$, 这是一个矛盾. 故我们有 $c_1 = 1$, 即 $x_* = x^*$. 因此, C 在 P_h 中有唯一的不动点. 注意到 $[u_0, v_0] \subset P_h$, 我们可知 x^* 是算子 C 在 $[u_0, v_0]$ 中的唯一不动点. 对于任意的初值 x_0, $y_0 \in P_h$, 我们能选取一个小的数 $\overline{e} \in (0, 1)$ 使得

$$\overline{e}h \leq x_0 \leq \frac{1}{\overline{e}}h, \qquad \overline{e}h \leq y_0 \leq \frac{1}{\overline{e}}h.$$

从条件 (H_1) 可知, 存在 $t_3 \in (a, b)$ 使得 $\tau(t_3) = \overline{e}$, 于是

$$\tau(t_3)h \leq x_0 \leq \frac{1}{\tau(t_3)}h, \qquad \tau(t_3)h \leq y_0 \leq \frac{1}{\tau(t_3)}h.$$

我们可选取一个充分大的正整数 q 使得

$$\left(\frac{\varphi(t_3,h,h)}{\tau(t_3)}\right)^q \geq \frac{1}{\tau(t_3)}.$$

取 $\hat{u}_0=[\tau(t_3)]^q h,\ \ \hat{v}_0=\frac{1}{[\tau(t_3)]^q}h$. 易见

$$\hat{u}_0 \leq x_0 \leq \hat{v}_0, \qquad \hat{u}_0 \leq y_0 \leq \hat{v}_0.$$

作迭代序列

$$x_n=C(x_{n-1},y_{n-1}), \quad y_n=C(y_{n-1},x_{n-1}), \quad n=1,2,\cdots,$$

$$\hat{u}_n=C(\hat{u}_{n-1},\hat{v}_{n-1}), \quad \hat{v}_n=C(\hat{v}_{n-1},\hat{u}_{n-1}), \quad n=1,2,\cdots.$$

基于算子 C 的混合单调性, 我们有

$$\hat{u}_n \leq x_n \leq \hat{v}_n, \qquad \hat{u}_n \leq y_n \leq \hat{v}_n, \qquad n=1,2,\cdots.$$

与上述证明相似, 我们可知存在 $y^* \in P_h$ 使得

$$C(y^*,y^*)=y^*, \qquad \lim_{n\to\infty}\hat{u}_n=\lim_{n\to\infty}\hat{v}_n=y^*.$$

既然算子 C 在 P_h 中存在唯一不动点, 我们有 $y^*=x^*$. 考虑到 P 是正规的, 我们推出 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=x^*$. 证毕.

定理 2.2.2 的证明 与定理 2.2.1 的证明相似, 我们仅需检验 (2.2.7) 成立即可.

对于任意给定的 $t\in(a,b)$, 注意到 $\varphi(t,x,y)$ 关于 x 非增, 并且关于 y 非减, 由 (2.2.2), (2.2.4) 及 (2.2.5), 可得

$$\begin{aligned}
u_1 &= C(u_0,v_0)=C\left([\tau(t_0)]^k h, \tfrac{h}{[\tau(t_0)]^k}\right)\\
&\geq \varphi\left(t_0,[\tau(t_0)]^{k-1}h,\tfrac{h}{[\tau(t_0)]^{k-1}}\right)\varphi\left(t_0,[\tau(t_0)]^{k-2}h,\tfrac{h}{[\tau(t_0)]^{k-2}}\right)\cdots\varphi(t_0,h,h)C(h,h)\\
&\geq [\varphi(t_0,h,h)]^k\tau(t_0)h\\
&\geq [\tau(t_0)]^k h=u_0.
\end{aligned}$$

同时注意到 $\varphi(t,x,y)>\tau(t),\ \forall\, t\in(a,b),\ x,\ y\in P$. 结合 (2.2.2) 与 (2.2.6), 可得

$$\begin{aligned}
v_1 &= C(v_0,u_0)=C\left(\tfrac{h}{[\tau(t_0)]^k},[\tau(t_0)]^k h\right)\\
&\leq \frac{1}{\varphi\left(t_0,\frac{h}{[\tau(t_0)]^k},[\tau(t_0)]^k h\right)}\frac{1}{\varphi\left(t_0,\frac{h}{[\tau(t_0)]^{k-1}},[\tau(t_0)]^{k-1}h\right)}\cdots\frac{1}{\varphi\left(t_0,\frac{h}{\tau(t_0)},\tau(t_0)h\right)}C(h,h)
\end{aligned}$$

$$< \frac{1}{[\tau(t_0)]^{k-1}} \frac{1}{\varphi\left(t_0, \frac{h}{\tau(t_0)}, \tau(t_0)h\right)} C(h,h)$$

$$\leq \frac{1}{[\tau(t_0)]^k} h = v_0.$$

故我们可知 (2.2.7) 成立. 剩余的证明和定理 2.2.1 相似, 为简便起见, 我们略去.

注记 2.2.1 与定理 2.1.2 相比, 本文的主要工作为: 对算子 A 的限制进行了弱化, 即定理 2.1.2 中的条件 "$A: P_h \times P_h \longrightarrow P_h$" 分别被定理 2.2.1 中的 (2.2.1) 以及定理 2.2.2 中的 (2.2.2) 取代. 进一步, 我们也去掉了定理 2.1.2 中的条件 "存在 x_0, $y_0 \in P_h$, 且 $x_0 \leq y_0$ 使得 $\overline{\lim}_{t\to 0^+} \eta(x_0, y_0, t) = +\infty$".

根据文献 [14] 中的推论 2.5 的证明, 我们可获得以下推论:

推论 2.2.1 令 P 是实 Banach 空间 E 中的正规锥, 并且算子 $A: P\times P \longrightarrow P$ 是混合单调算子. 令 B 是 E 中的线性算子, 使得

(C_1) $\|B\| < 1$, 存在某个数 $b \geq 0$ 使得 $B + bI \geq 0$;

(C_2) A 满足定理 2.2.1 或定理 2.2.2 中的条件.

则方程 (2.1.1) 在 $[u_0, v_0]$ 中有唯一解 x^*.

§2.3 对积分方程的应用

我们考察如下非线性积分方程

$$\int_{a_1}^{a_2} G(t,s)[f(x(s))+g(x(s))]ds = [1+G_1(t)]x(t) - G_2(t)x(t+\tau), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.3.1)$$

其中 a_1, a_2 及 τ 均为实数. 关于非线性积分方程的系统讨论, 读者可参看专著 [23].

令 $E = C(\mathbb{R})$ 表示所有定义在 $\mathbb{R}$ 上的连续有界函数构成的集合, 易证在上确界范数下为 Banach 空间. 定义 E 中的锥 P 如下:

$$P = \{x \in E | x(t) \geq 0, \ \ \forall\, t \in \mathbb{R}\}.$$

定理 2.3.1 假定以下条件成立:

(D_1) 令 G_1, $G_2 \in E$, $G(t,s)$ 为定义在 $\mathbb{R} \times [a_1, a_2]$ 上的一致连续函数, $f(x)$ 是增的, $g(x)$ 是减的, 并且, 对于 $x \geq 0$, 有 $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$;

(D_2) 存在 $\overline{g}$, g_1, $g_2 \in [0, +\infty)$ 使得 $0 \leq G(t,s) \leq \overline{g}$, $0 \leq G_1(t) \leq g_1$, $0 \leq G_2(t) \leq g_2$, 且 $g_1 + g_2 < 1$, 其中 $t \in \mathbb{R}$, $s \in [a_1, a_2]$;

(D_3) 存在定义在区间 $\mathbb{R}$ 上的函数 $\tau(t)$, $\varphi(t,x_1,x_2)$ 使得 $\tau:\mathbb{R}\longrightarrow(0,1)$ 是一个满射, 且 $\varphi(t,x_1,x_2)>\tau(t)$, $\forall\, t\in\mathbb{R}$, x_1, $x_2\in P$ 满足

$$\begin{aligned}&\int_{a_1}^{a_2}G(t,s)\left[f(\tau(\mu)x_1(s))+g\left(\frac{1}{\tau(\mu)}x_2(s)\right)\right]ds\\&\geq\varphi(\mu,x_1,x_2)\int_{a_1}^{a_2}G(t,s)[f(x_1(s))+g(x_2(s))]ds,\quad\forall\,\mu\in\mathbb{R},\ x_1,\ x_2\in P;\end{aligned}$$

(D_4) 对于固定的 $t\in\mathbb{R}$, $\varphi(t,x_1,x_2)$ 关于 x_1 非增, 且关于 x_2 非减;

(D_5) 存在 $e\in P\backslash\{0\}$ 和 $t_0\in\mathbb{R}$ 使得

$$\begin{aligned}\tau(t_0)e(t)&\leq\int_{a_1}^{a_2}G(t,s)[f(e(s))+g(e(s))]ds+G_2(t)e(t+\tau)-G_1(t)e(t)\\&\leq\frac{\varphi\left(t_0,\frac{e(t)}{\tau(t_0)},\tau(t_0)e(t)\right)}{\tau(t_0)}e(t),\quad\forall\,t\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

则积分方程 (2.3.1) 在 P_e 中有唯一解 x^*.

定理 2.3.1 的证明 我们重写积分方程 (2.3.1) 如下

$$x(t)=\int_{a_1}^{a_2}G(t,s)[f(x(s))+g(x(s))]ds+G_2(t)x(t+\tau)-G_1(t)x(t),\quad t\in\mathbb{R}.$$

定义

$$\begin{aligned}A(x_1,x_2)(t)&=\int_{a_1}^{a_2}G(t,s)[f(x_1(s))+g(x_2(s))]ds,\quad t\in\mathbb{R},\\Bx(t)&=G_2(t)x(t+\tau)-G_1(t)x(t),\quad t\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

根据条件 (D_1) 可知, $A:P\times P\longrightarrow P$ 是混合单调算子.

对于线性算子 B, 我们有 $\|B\|\leq g_1+g_2<1$, 及 $B+bI\geq 0$ 对于 $b\geq g_1$ 成立.

另一方面, 对于任意给定的 $\mu\in\mathbb{R}$ 和 x_1, $x_2\in P$, 从条件 (D_3) 可得

$$\begin{aligned}A\left(\tau(\mu)x_1,\tfrac{1}{\tau(\mu)}x_2\right)&=\int_{a_1}^{a_2}G(t,s)\left[f(\tau(\mu)x_1(s))+g\left(\frac{1}{\tau(\mu)}x_2(s)\right)\right]ds\\&\geq\varphi(\mu,x_1,x_2)\int_{a_1}^{a_2}G(t,s)[f(x_1(s))+g(x_2(s))]ds\\&=\varphi(\mu,x_1,x_2)A(x_1,x_2).\end{aligned}$$

也即

$$A\left(\tau(\mu)x_1,\frac{1}{\tau(\mu)}x_2\right)\geq\varphi(\mu,x_1,x_2)A(x_1,x_2),\qquad\mu\in\mathbb{R},\ \ x_1,\ x_2\in P.$$

此外, 由条件 (D_5) 可知, 对于任意给定的 $t\in\mathbb{R}$, 我们有

$$\begin{aligned}\tau(t_0)e(t) &\le A(e,e)+B(e)\\ &=\int_{a_1}^{a_2}G(t,s)[f(e(s))+g(e(s))]ds+G_2(t)e(t+\tau)-G_1(t)e(t)\\ &\le\frac{\varphi\Big(t_0,\frac{e(t)}{\tau(t_0)},\tau(t_0)e(t)\Big)}{\tau(t_0)}e(t),\quad\forall\, t\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

这样, 推论 2.2.1 中的所有条件满足. 由推论 2.2.1, 可获得积分方程 (2.3.1) 在 P_e 中有唯一解.

§2.4 对时间尺度上的边值问题的应用

在这一节中, 我们将定理 2.2.2 应用到以下时间尺度上的带 Sturm-Liouville 边值条件的二阶边值问题

$$(py^{\Delta})^{\nabla}(t)+[f(t,y(t))+g(t,y(t))]=0,\quad t\in(a,b]_{\mathbb{T}},\tag{2.4.1}$$

$$\alpha y(a)-\beta(py^{\Delta})(a)=0,\quad \gamma y^{\sigma}(b)+\delta(py^{\Delta})(b)=0,\tag{2.4.2}$$

其中

$$p:\ [a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}}\longrightarrow(0,+\infty),\qquad p\in C[a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}},\tag{2.4.3}$$

$$\beta,\ \delta\in(0,+\infty),\quad \alpha,\ \gamma\in[0,+\infty),\quad \beta\gamma+\alpha\delta+\alpha\gamma\int_a^{\sigma(b)}\frac{\Delta\tau}{p(\tau)}>0.\tag{2.4.4}$$

时间尺度上的动力学方程的研究可回溯到其创建者 Hilger 教授 [24], 在理论和应用上仍然是一个崭新的领域. 近年来, 对于时间尺度上的二阶边值问题正解的存在性研究, 获得了广泛的关注. 此种研究可对既作用在连续时间又作用在离散时间上的一些现象提供较准确的信息. 读者可参看 [5-7, 25-33]. 我们主要叙述 Anderson and Wong [26], Jankowski [30] 及 Wang, Wu 和 Wu [33] 的一些结果, 正是这些结果激发我们考察问题 (2.4.1) 与 (2.4.2).

在文 [26] 中, Anderson 和 Wong 研究了以下时间尺度上的二阶半正边值问题

$$(py^{\Delta})^{\nabla}(t)+\lambda f(t,u(t))=0,\quad t\in(a,b]_{\mathbb{T}},$$

其带有 Sturm-Liouville 边值条件 (2.4.2).

另一方面, 上下解方法已被广泛地用于证明时间尺度上动力学方程的解的存在性. 在文 [30] 中, Jankowski 考察了以下时间尺度上的带导数项的二阶动力学方程

$$-x^{\Delta\Delta}(t) = f(t, x(t), x(\alpha(t))) \equiv (Fx)(t),\ t \in [0, T]_{\mathbb{T}},$$

$$x(0) = k_1 \in \mathbb{R},\quad x(T) = k_2 \in \mathbb{R}.$$

通过上下解方法, 获得了上述问题有一个最小解和最大解.

在文 [33] 中, Wang, Wu 与 Wu 考察了以下边值问题的广义拟线性化方法

$$-(p(t)x^{\Delta})^{\nabla} + q(t)x^{\sigma} = f(t, x^{\sigma}) + g(t, x^{\sigma}),\quad t \in [a, b]_{\mathbb{T}},$$

$$\tau_1 x(\rho(a)) - \tau_2 x^{\Delta}(\rho(a)) = 0,\quad x(\sigma(b)) - \tau_3 x(\eta) = 0.$$

[33] 的主要特点是对 $f^{(i)}(t, x)$, $g^{(i)}(t, x)(1 < i < k)$ 放宽了单调性的条件, 使之包含了更一般的上下解的含义. 因此, 对于时间尺度上更大的非线性函数类, 确保了其迭代序列的高阶收敛性.

在文 [32] 中, 我们考察了以下时间尺度上的 m 点边值问题

$$u^{\Delta\nabla}(t) + f(t, u(t)) = 0,\quad t \in [0, 1] \subset \mathbb{T}, \tag{2.4.5}$$

$$\beta u(0) - \gamma u^{\Delta}(0) = 0,\ u(1) = \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i u(\xi_i),\quad m \geq 3. \tag{2.4.6}$$

通过考察非线性项 f 在某些有界集上的“高度”, 借助于单调迭代方法, 我们不仅获得了问题 (2.4.5) 和 (2.4.6) 的正解存在性, 而且也建立了逼近解的迭代格式. 在本质上, 我们将上下解方法和范数形式的锥拉伸与锥压缩不动点定理结合了起来.

注意到在文献 [30, 33] 中, 上下解条件都是必需的, 文献 [30, 32, 33] 的研究者仅仅探讨了其正解的存在性. 因此, 一个自然的问题是讨论问题 (2.4.1) 和 (2.4.2) 的解的存在唯一性和迭代收敛性.

为了获得我们的主要结果, 我们建立以下一些引理. 这些引理都是基于以下带有边界条件 (2.4.2) 的线性方程

$$-(py^{\Delta})^{\nabla}(t) = u(t),\quad t \in (a, b]_{\mathbb{T}}. \tag{2.4.7}$$

定义常数 d 如下:

$$d := \beta\gamma + \alpha\delta + \alpha\gamma \int_a^{\sigma(b)} \frac{\Delta\tau}{p(\tau)}. \tag{2.4.8}$$

引理 2.4.1([26]) 令 (2.4.3) 和 (2.4.4) 成立. 则非齐次边值问题 (2.4.7), (2.4.2) 有唯一解 y, 其表示形式为

$$y(t)=\int_a^b G(t,s)u(s)\nabla s,\quad t\in[a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}},$$

其中 Green 函数 $G(t,s)$ 表为

$$G(t,s)=\frac{1}{d}\begin{cases}\left(\beta+\alpha\displaystyle\int_a^s\frac{\Delta\tau}{p(\tau)}\right)\left(\delta+\gamma\displaystyle\int_t^{\sigma(b)}\frac{\Delta\tau}{p(\tau)}\right): & a\le s\le t\le\sigma(b),\\ \left(\beta+\alpha\displaystyle\int_a^t\frac{\Delta\tau}{p(\tau)}\right)\left(\delta+\gamma\displaystyle\int_s^{\sigma(b)}\frac{\Delta\tau}{p(\tau)}\right): & a\le t\le s\le\sigma(b),\end{cases}\tag{2.4.9}$$

对于所有的 $t,s\in[a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}}$ 成立, 这里的 d 由 (2.4.8) 确定.

引理 2.4.2([26]) 假设 (2.4.3) 和 (2.4.4) 成立. 则 (2.4.9) 中的 Green 函数 $G(t,s)$ 满足

$$g(t)G(s,s)\le G(t,s)\le G(s,s),\quad t,s\in[a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}},$$

其中 g 由下式给出

$$g(t)=\min_{t\in[a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}}}\left\{\frac{\delta+\gamma\displaystyle\int_t^{\sigma(b)}\frac{\Delta\tau}{p(\tau)}}{\delta+\gamma\displaystyle\int_a^{\sigma(b)}\frac{\Delta\tau}{p(\tau)}},\frac{\beta+\alpha\displaystyle\int_a^{t}\frac{\Delta\tau}{p(\tau)}}{\beta+\alpha\displaystyle\int_a^{\sigma(b)}\frac{\Delta\tau}{p(\tau)}}\right\}\in[0,1].\tag{2.4.10}$$

令 Banach 空间 $\mathbb{B}=C[a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}}$, 赋予了范数 $\|u\|=\sup_{t\in[a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}}}|u(t)|$. 定义锥 $K\subset\mathbb{B}$ 如下

$$K=\{u\in\mathbb{B}|\min_{t\in[a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}}}u(t)\ge 0\}.$$

我们的结果为以下定理:

定理 2.4.1 假设以下条件成立:

(E_1) $f,\ g:(a,b]_{\mathbb{T}}\times[0,+\infty)\longrightarrow[0,+\infty)$ 是连续函数;

(E_2) 对于固定的 t, $f(t,u)$ 关于 u 非减, $g(t,u)$ 关于 u 非增;

(E_3) 存在定义在区间 $(a,b)_{\mathbb{T}}$ 上的函数 $\tau(t)$, $\varphi(t,y_1,y_2)$ 使得 $\tau:(a,b)_{\mathbb{T}}\longrightarrow$

$(0,1)$ 是一个满射, $\varphi(t,y_1,y_2)>\tau(t)$, $\forall\, t\in(a,b)_{\mathbb{T}}$, y_1, $y_2\in K$, 并且满足

$$\int_a^b G(t,s)\left[f(s,\tau(\lambda)y_1(s))+g\left(s,\frac{1}{\tau(\lambda)}y_2(s)\right)\right]\nabla s$$
$$\geq \varphi(\lambda,y_1,y_2)\int_a^b G(t,s)[f(s,y_1(s))+g(s,y_2(s))]\nabla s,\quad \forall\,\lambda\in(a,b)_{\mathbb{T}},\ y_1,\ y_2\in K;$$

(E_4) 对于任意的 $t\in(a,b)_{\mathbb{T}}$, 当固定 y_2 时, $\varphi(t,y_1,y_2)$ 关于 y_1 非增, 当固定 y_1 时,$\varphi(t,y_1,y_2)$ 关于 y_2 非减;

(E_5) 存在 $h\in K\backslash\{0\}$ 且 $t_0\in(a,b)_{\mathbb{T}}$ 使得 $\forall\, t\in[a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}}$, 有

$$\tau(t_0)h(t)\leq\int_a^b G(t,s)[f(h(s))+g(h(s))]\nabla s\leq\frac{\varphi\left(t_0,\frac{h(t)}{\tau(t_0)},\tau(t_0)h(t)\right)}{\tau(t_0)}h(t).$$

则问题 (2.4.1) 和 (2.4.2) 在 K_h 中有唯一的正解 y^*. 进而, 对于任意的初值 x_0, $y_0\in K_h$, 作迭代序列

$$x_n(t)=\int_a^b G(t,s)[f(s,x_{n-1}(s))+g(s,y_{n-1}(s))]\nabla s,\quad t\in[a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}},\quad n=1,2,\cdots,$$

$$y_n(t)=\int_a^b G(t,s)[f(s,y_{n-1}(s))+g(s,x_{n-1}(s))]\nabla s,\quad t\in[a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}},\quad n=1,2,\cdots,$$

当 $n\longrightarrow\infty$ 时, 有 $\|x_n-x^*\|\longrightarrow 0$ 与 $\|y_n-x^*\|\longrightarrow 0$.

定理 2.4.1 的证明 定义

$$F(y_1,y_2)(t)=\int_a^b G(t,s)[f(s,y_1(s))+g(s,y_2(s))]\nabla s,\quad t\in[a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}}.$$

由引理 2.4.1 可知, 问题 (2.4.1) 和 (2.4.2) 等价于以下不动点方程

$$y(t)=F(y,y)(t),\qquad t\in[a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}}.$$

由条件 (E_2), 容易验证 $F:K\times K\longrightarrow K$ 是混合单调的.

对于任意给定的 $\lambda\in(a,b)_{\mathbb{T}}$ 及 y_1, $y_2\in K$, 从条件 (E_3) 可知

$$\begin{aligned}F\left(\tau(\lambda)y_1,\tfrac{1}{\tau(\lambda)}y_2\right)&=\int_a^b G(t,s)\left[f(s,\tau(\lambda)y_1(s))+g\left(s,\frac{1}{\tau(\lambda)}y_2(s)\right)\right]\nabla s\\&\geq\varphi(\lambda,y_1,y_2)\int_a^b G(t,s)[f(s,y_1(s))+g(s,y_2(s))]\nabla s\\&=\varphi(\lambda,y_1,y_2)F(y_1,y_2),\end{aligned}$$

即

$$F\left(\tau(\lambda)y_1, \frac{1}{\tau(\lambda)}y_2\right) \geq \varphi(\lambda, y_1, y_2)F(y_1, y_2), \quad \lambda \in (a,b)_{\mathbb{T}}, \ \ y_1, \ y_2 \in K.$$

进而, 根据条件 (E_5), 可得

$$\begin{aligned}\tau(t_0)h(t) &\leq F(e,e) = \int_a^b G(t,s)[f(s,e(s)) + g(s,e(s))]\nabla s \\ &\leq \frac{\varphi\left(t_0, \frac{h(t)}{\tau(t_0)}, \tau(t_0)h(t)\right)}{\tau(t_0)}h(t), \quad \forall\, t \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}.\end{aligned}$$

因此, 定理 2.2.2 的所有条件均满足, 由定理 2.2.2 可推出定理 2.4.1 的结论.

现在, 让我们以一个具体的例子来结束本章.

例子 2.4.1 令 $\mathbb{T} = \{2^k\}_{k\in\mathbb{Z}} \cup \{0\}$, 其中 $\mathbb{Z}$ 表示整数集. 考察以下时间尺度 $\mathbb{T}$ 上的边值问题:

$$(y^{\Delta})^{\nabla}(t) + [f(y(t)) + g(y(t))] = 0, \quad t \in (0,1]_{\mathbb{T}}, \tag{2.4.11}$$

$$y(0) - (y^{\Delta})(0) = 0, \quad y^{\sigma}(1) + (y^{\Delta})(1) = 0, \tag{2.4.12}$$

其中 $f(y) = 2 + y^{\frac{1}{2}}$, $g(y) = \frac{1}{7+y}$. 易于验证 f, $g : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ 是连续函数, 并且 f 关于 y 单调非减, g 关于 y 单调非增.

对于任意的 $\lambda \in (0,1)$, 及 y_1, $y_2 \in K$, 我们有

$$\begin{aligned}&\int_0^1 G(t,s)\left[2 + (\lambda y_1(s))^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{7 + \frac{1}{\lambda}y_2(s)}\right]\nabla s \\ &\geq \lambda \int_0^1 G(t,s)\left[2\lambda^{-1} + \lambda^{-\frac{1}{2}}y_1^{\frac{1}{2}}(s) + \frac{1}{7 + y_2(s)}\right]\nabla s \\ &\geq \lambda \frac{2\lambda^{-1} + \lambda^{-\frac{1}{2}}y_1^{\frac{1}{2}}(s) + \frac{1}{7+y_2(s)}}{2 + y_1^{\frac{1}{2}}(s) + \frac{1}{7+y_2(s)}} \int_0^1 G(t,s)\left[2 + y_1^{\frac{1}{2}}(s) + \frac{1}{7 + y_2(s)}\right]\nabla s.\end{aligned} \tag{2.4.13}$$

在 (2.4.13) 中, 注意到 $\lambda < \varphi(\lambda, y_1, y_2) = \lambda \dfrac{2\lambda^{-1} + \lambda^{-\frac{1}{2}}y_1^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{7+y_2}}{2 + y_1^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{7+y_2}} < 1$. 对于任意的 $\lambda \in (0,1)$, 通过计算可得, 固定 y_2 时, φ 关于 y_1 是非增的; 固定 y_1 时, φ 关于 y_2 是非减的.

接下来, 仅需检验定理 2.4.1 中的条件 (E_5) 满足. 通过直接的计算可得 $g(t) = \frac{1}{1+\sigma(1)} = \frac{1}{3}$,

$$\begin{aligned}\int_0^1 G(s,s)\nabla s &= 4 + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-1-2n} - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-3-3n} - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-2n} + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-1-3n} \\ &= \tfrac{79}{21} > 0.\end{aligned}$$

故

$$\frac{79}{63} \le \int_0^1 G(t,s)\nabla s \le \frac{79}{21}, \quad t \in [0,\sigma(1)]_{\mathbb{T}}.$$

既然 $f(1)+g(1) = \frac{25}{8}$, 我们可选取 $e = 1,\ t_0 = 0.01$, 容易验证

$$\begin{aligned}0.01 &< \tfrac{79}{63} \cdot \tfrac{25}{8} \le \int_0^1 G(t,s)[f(1)+g(1)]\nabla s \\ &\le \tfrac{79}{21} \cdot \tfrac{25}{8} < \tfrac{2(0.01)^{-1}+(0.01)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{0.01}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{7+0.01}}{2+(0.01)^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{7+0.01}} \\ &= \tfrac{2104}{85.12}.\end{aligned}$$

因此, 定理 2.4.1 中的条件 (E_5) 满足. 证毕.

第三章 非线性算子方程的多重解及其应用

§3.1 引言

非线性算子方程的多解性在理论和应用上都是有意义的 [34-39]. 二十世纪七十年代, Amann 在文 [34] 中获得了以下著名的 Amann 三解定理:

定理 3.1.1([34]) 设 E 是实 Banach 空间, P 是 E 中的正规体锥, x_1, y_1, x_2, $y_2 \in E$ 满足

$$x_1 < y_1 < x_2 < y_2; \tag{3.1.1}$$

设 $A : [x_1, y_2] \longrightarrow E$ 为全连续的强增算子, 并且

$$x_1 \leq Ax_1, \quad Ay_1 < y_1, \quad x_2 < Ax_2, \quad Ay_2 \leq y_2,$$

则 A 在 $[x_1, y_2]$ 中至少有三个不动点 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, 满足 $x_1 \leq \varphi_1 \ll y_1$, $x_2 \ll \varphi_2 \leq y_2$, $x_2 \not\leq \varphi_3 \not\leq y_1$.

定理 3.1.1 借助于两对上下解获得了三个非零解. 文 [35] 指出, 序关系 (3.1.1) 可放宽为以下较广的形式:

$$x_1 < y_1, \quad x_2 < y_2, \quad x_1 < y_2, \quad x_2 \not\leq y_1.$$

我们注意到定理 3.1.1 和 Leggett-Williams 三解定理 [36] 以及文 [37-39] 中的算子在实质上是压缩型的. 在文 [40] 中, 孙经先教授建立了一个两点拉伸型的不动点定理, 文 [41, 42] 改进了这一结果. 受文 [40] 的激发, 郭大钧先生在其专著 [43] 中获得了以下算子为拉伸型的三解定理:

定理 3.1.2([43]) 设 P 是实 Banach 空间 E 中的正规体锥, $A : E \longrightarrow E$ 是全连续增算子, A 可以表示成 $A = KF$ 的形式, 这里 $F : E \longrightarrow E$ 是连续有界增算子, $K : E \longrightarrow E$ 是线性全连续增算子. 再设

(i) 存在 $x_1, y_1, x_2, y_2 \in E$ 满足

$$y_1 \not\leq x_1 \ll x_2, \quad y_1 \ll x_2, \quad y_1 \ll y_2 \not\leq x_2, \tag{3.1.2}$$

$$Ax_1 \leq x_1, \quad y_1 \ll Ay_1, \quad Ax_2 \ll x_2, \quad y_2 \leq Ay_2; \tag{3.1.3}$$

(ii) 存在 $u^* \in P^\circ$, 以及 $\delta_1 > 0$, 使得

$$Kx \geq \delta_1 \|Kx\| u^*, \qquad \forall\, x \in P.$$

则 A 在 E 中至少有三个不动点 ψ_1, ψ_2, ψ_3, 满足 $y_1 \not\leq \psi_1 \not\leq x_1$, $y_1 \ll \psi_2 \ll x_2$, $y_2 \not\leq \psi_3 \not\leq x_2$, $\psi_1 \ll x_2$, $\psi_3 \gg y_1$.

条件 (3.1.2) 和 (3.1.3) 称为两对反向上下解, 即此两对上下解的下解均不小于等于上解. 对于线性算子 $K: E \longrightarrow E$ 而言, 若满足条件 (ii), 则称 K 为一致正线性算子. 此定理是对 Amann 三解定理的重要补充, 其不仅适用于次线性问题, 而且适用于超线性问题, 由超线性问题决定的下解和上解, 一般为反向上下解. 2002 年, 文 [35] 提出了两对平行上下解的概念, 在假设算子存在两对平行上下解的前提下, 讨论了一类超线性算子方程的多解性, 证明了如下六解定理:

定理 3.1.3([35]) 设 P 是实 Banach 空间 E 中的正规体锥, $A: E \longrightarrow E$ 是凝聚算子, A 可以表示成 $A = KF$ 的形式, 这里 $F: E \longrightarrow E$ 是严格增算子, $K: E \longrightarrow E$ 为一致正线性算子且是强正的. 再设存在 $x_i, y_i\ (i = 1, 2) \in E$, 使得

$$x_1 < y_1, \quad x_2 < y_2, \quad x_1 \not\leq y_2, \quad x_2 \not\leq y_1, \tag{3.1.4}$$

且

$$x_1 < Ax_1, \quad Ay_1 < y_1, \quad x_2 < Ax_2, \quad Ay_2 < y_2. \tag{3.1.5}$$

则算子 A 至少有六个不同的不动点.

满足条件 (3.1.4) 和 (3.1.5) 的两对上下解称为两对平行上下解. 此处的两对平行上下解与 Amann 三解定理中的两对上下解以及两对反向上下解相比, 最根本的区别在于两对上下解中, 其第一对的下解不小于等于第二对的上解. 其主要思路为: 利用该两对上下解对空间区域进行适当的分割, 目的在于获得尽可能多的不动点指数非零的区域, 进而根据不动点指数理论得到该超线性算子方程的多解性. 有关平行上下解的抽象结果还可参见文 [44].

对于具体方程而言, 反向上下解和平行上下解通常是不易验证的, 因此，如何构造上述上下解条件或者以较易验证的条件刻画超线性问题, 一直是学者们感兴趣的课题. 文 [41] 将凸算子与两点拉伸型不动点定理结合起来, 统一研究, 分别建立了凸算子和超线性算子的不动点的存在性定理. 与文 [35, 40] 的主要结论是描述超线性问题一样, 凸算子描述的也是超线性问题, 该文实际上为构造反向上下解提供了一种方法. 文 [45] 通过定义具有一定序关系的有界集，获得了一类非减算子的正不动点. 将该抽象结果应用于超线性的周期边值问题时, 仅假定下解的存在性与非线性项在无穷远点的渐近性态.

在过去的几十年中, 带有凹凸性的非线性算子的不动点定理受到了广泛的关注, 并已被应用于各类非线性微分方程中 [12, 20, 21, 41, 45-52]. Krasnoselskii 在

文 [46] 中研究了 e- 凹算子和 e- 凸算子的定义及其一些性质. 在文 [47] 中, Potter 介绍了 α- 凹算子和 α- 凸算子的定义. 注意到赵增勤教授在文 [48] 中建立了几类非线性算子的多个不动点的存在性定理, 在这几类算子中, 一种特殊的情形为 α- 凹算子与 β- 凸算子之和的算子. 文 [49] 是文 [48] 的继续, 作者进一步讨论了两个算子之和的非线性算子, 结合序形式的锥拉伸与锥压缩不动点定理, 获得了其多个正不动点的存在性. 作为其特例, 文 [49] 中的推论 3.1 证明了在适当的条件下, e- 凹算子和 e- 凸算子之和至少有两个正不动点. 最近, 翟和曹在文 [20] 中定义了一类 τ-φ- 凹算子, 此类算子在本质上是次线性的, α- 凹算子 $(0<\alpha<1)$ 是其特例. 受文 [20] 的启发, 文 [50] 引入了 τ-φ- 凸算子, 此类算子在本质上是超线性的,β- 凸算子 $(\beta>1)$ 为其特例. 在一定的条件下, 作者获得了该类算子的不动点的存在性结果, 作为推论, 也给出了关于 e- 凸算子和 α- 凸算子的不动点定理.

与此同时, 一些学者借助于构造适当的泛函来实现锥拉伸条件, 如文 [53] 通过凸泛函构造了 Banach 空间中的收缩核, 并利用此收缩核建立了凸泛函型的锥拉伸与锥压缩不动点定理, 文 [54] 则考虑了有界连续凹泛函, 文 [55, 56] 研究了凹凸泛函的组合形式.

在本章中, 首先在两对平行上下解的条件下, 研究非线性算子方程的多解性, 我们的结果推广和改进了文 [35, 43] 的主要结论, 我们的思想来源于文 [41, 42]. 然后, 将 τ-φ- 凹算子与 τ-φ- 凸算子结合起来, 考察了一类非线性算子的两个正不动点的存在性, 作为推论, 获得了 φ_1- 凹算子和 φ_2- 凸算子之和的不动点定理. 我们的结果推广了文 [48, 49] 的相应结论. 最后, 将抽象结果分别应用于非线性 Hammerstein 型积分方程和一类二阶微分方程的多点边值问题.

E 是赋予范数 $\|\cdot\|$ 的实 Banach 空间, θ 是 E 中的零元, 且 P 是 E 中的一个锥. 记 $\mathbb{R}^+=[0,+\infty)$, $P^+=P\backslash\{\theta\}$, 且

$$C_e=\{x\in E:\ \text{存在正数}\ a,\ b\ \text{使得}\ \ ae\le x\le be\},$$

其中 $e\in P^+$. 算子 A 是强增的, 即 $x<y$ 蕴含着 $Ax\ll Ay$. 若 A 是一个线性算子, A 是强增蕴含着 A 是强正的.

以下我们陈述一些定义与一个引理.

定义 3.1.1([2, 12, 46]) 令 P 是实 Banach 空间 E 中的锥, $e\in P^+$.

(i) $A_1:P\longrightarrow P$, 若对于任意给定的 $x\in P^+$, 均有 $A_1x\in C_e$; 对于任给的 $(x,t)\in C_e\times(0,1)$, 存在 $\zeta_1=\zeta_1(x,t)>0$ 使得 $A_1(tx)\ge t(1+\zeta_1)A_1x$. 则称 A_1 是 e- 凹算子.

(ii) $A_2: P \longrightarrow P$, 若对于任给的 $x \in P^+$, 均有 $A_2x \in C_e$; 对于任给的 $(x,t) \in C_e \times (0,1)$, 存在 $\zeta_2 = \zeta_2(x,t) > 0$ 使得 $A_2(tx) \le t(1-\zeta_2)A_2x$. 则称 A_2 是 e- 凸算子.

定义 3.1.2([47]) 令 $A: P \longrightarrow P$ 和 $\alpha \in \mathbb{R}$. 则我们称 A 是 α- 凹 (β- 凸) 算子当且仅当 $A(tx) \ge t^\alpha Ax$ ($A(tx) \le t^\beta Ax$) 对于所有的 $(x,t) \in P \times (0,1)$ 成立.

定义 3.1.3([57]) 假设 $P \subset E$ 是一个锥. 若存在一个泛函 $\varphi: P \times (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ 及 $\varphi(x,t) > t$, $\forall\, t \in (0,1)$ 使得

$$A_1(tx) \ge \varphi(x,t)A_1x, \quad \forall\, t \in (0,1), \quad x \in P.$$

则称算子 $A_1: P \longrightarrow P$ 是 φ- 凹算子.

若存在一个泛函 $\varphi: P \times (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ 及 $\varphi(x,t) < t$, $\forall\, t \in (0,1)$ 使得

$$A_2(tx) \le \varphi(x,t)A_2x, \quad \forall\, t \in (0,1), \quad x \in P.$$

则称算子 $A_2: P \longrightarrow P$ 是 φ- 凸算子.

定义 3.1.4([20, 50]) 假设 $P \subset E$ 是一个锥. 若存在一个函数 $\tau: (a,b) \longrightarrow (0,1)$ 和一个泛函 $\varphi: P \times (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ 及 $\varphi(x,t) > \tau(t)$, $\forall\, t \in (a,b)$ 使得

$$A_1(\tau(t)x) \ge \varphi(x,t)A_1x, \quad \forall\, t \in (a,b), \quad x \in P.$$

则称算子 $A_1: P \longrightarrow P$ 是 τ-φ- 凹算子.

若存在一个函数 $\tau: (a,b) \longrightarrow (0,1)$ 与一个泛函 $\varphi: P \times (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ 及 $\varphi(x,t) < \tau(t)$, $\forall\, t \in (a,b)$ 使得

$$A_2(\tau(t)x) \le \varphi(x,t)A_2x, \quad \forall\, t \in (a,b), \quad x \in P.$$

则称算子 $A_2: P \longrightarrow P$ 是 τ-φ- 凸算子.

引理 3.1.1([58]) 令 $P_{r,s} = \{x \in P: \ r \le \|x\| \le s\}$ 且 $s > r > 0$. 假定 $A: P_{r,s} \longrightarrow P$ 是一个严格集压缩映射, 使得

$$Ax \not\geq x \quad x \in P, \ \|x\| = r \ \text{ 且 } \ Ax \not\leq x \quad x \in P, \ \|x\| = s.$$

则 A 在 P 中至少有一个不动点 x, 使得 $r < \|x\| < s$.

§3.2 在两对平行上下解条件下的非线性算子方程的多解性

在本部分中, 我们假定 E 是一个实 Banach 空间, P, Q 都为 E 中的正规锥, $Q \subset P$, $Q \neq \{\theta\}$.

定理 3.2.1 令 $A: P \longrightarrow P$ 是一个凝聚的增算子, $A(P) \subset Q$. 设以下条件满足:

(i) 存在 x_1, x_2, y_1, $y_2 \in P$, 使得 $x_1 < y_1$, $x_2 < y_2$, $x_1 < Ax_1$, $Ay_1 < y_1$, $x_2 < Ax_2$, $Ay_2 < y_2$, $x_1 \not\leq y_2$, $x_2 \not\leq y_1$;

(ii) 存在 $h \in P \backslash \{\theta\}$ 和一个泛函 $f: Q \longrightarrow \mathbb{R}^+$ 及 $f(x) \longrightarrow +\infty (\|x\| \longrightarrow +\infty)$, 使得 $Ax \geq f(x)h$, $\forall\, x \in Q$;

(iii) $A|_Q$ 是 e- 连续的, 且 $e \in Q \backslash \{\theta\}$;

(iv) 存在 λ_1, μ_1, γ_1, λ_2, μ_2, $\gamma_2 > 0$ 与正整数 m_1, n_1, m_2, n_2 使得

$$A^{m_1} x_1 \geq x_1 + \mu_1 e, \quad A^{n_1} y_2 \leq y_2 - \lambda_1 e, \quad x_1 \leq \gamma_1 h,$$

$$A^{m_2} x_2 \geq x_2 + \mu_2 e, \quad A^{n_2} y_1 \leq y_1 - \lambda_2 e, \quad x_2 \leq \gamma_2 h.$$

则 A 在 P 中至少有六个不动点.

证明 定义集合

$$Q_1 = \{x \in Q | x \geq x_2\}, \quad \Omega = \{x \in Q_1 | Ax \not\geq x_1\}.$$

则 Ω 是 Q_1 中的一个开子集. 既然 $y_2 > x_2$, $Ay_2 < y_2$, $x_1 \not\leq y_2$, 那么 $Ay_2 \not\geq x_1$. 这意味着 $y_2 \in \Omega$. 换言之, Ω 是非空的. 我们可断言 Ω 是有界的. 否则, 由条件 (ii) 和 (iv) 可得, 存在 $\tilde{y} \in \Omega$ 使得 $f(\tilde{y}) \geq \gamma_1$. 因此, 我们有 $A\tilde{y} \geq f(\tilde{y})h \geq \gamma_1 h \geq x_1$. 这与 $\tilde{y} \in \Omega$ 相矛盾.

令

$$\Omega_1 = \{x \in Q_1 | \text{存在 } \lambda > 0 \ \text{ 使得 } \ Ax \leq y_2 - \lambda e\}.$$

由 $x_1 \not\leq y_2$, 可知 Ω_1 是 Ω 中的一个子集.

进而, 令 $U(\widetilde{x}, \delta)$ 表示以 $\widetilde{x}$ 为中心, δ 为半径的邻域. 设 $\widetilde{x} \in \Omega_1$, 则存在 $\lambda_{\widetilde{x}} > 0$ 使得

$$A\widetilde{x} \leq y_2 - \frac{\lambda_{\widetilde{x}}}{2} e.$$

由条件 (iii) 可得, 存在 $\delta > 0$, 使得对任给的 $x \in U(\widetilde{x}, \delta) \cap Q_1$, 有

$$-\frac{\lambda_{\widetilde{x}}}{2} e \leq Ax - A\widetilde{x} \leq \frac{\lambda_{\widetilde{x}}}{2} e.$$

故对任给的 $x \in U(\widetilde{x}, \delta) \cap Q_1$, 有

$$Ax \le A\widetilde{x} + \frac{\lambda_{\widetilde{x}}}{2}e \le y_2 - \lambda_{\widetilde{x}}e + \frac{\lambda_{\widetilde{x}}}{2}e = y_2 - \frac{\lambda_{\widetilde{x}}}{2}e.$$

即 $x \in \Omega_1$. 故 Ω_1 为相对于 Q_1 的一个开集.

由 A 的增性和条件 (iv), 可得

$$Ax_2 \le A(Ax_2) \le \cdots \le A^{n_1}x_2 \le A^{n_1}y_2 \le y_2 - \lambda_1 e.$$

故 $Ax_2 \in \Omega_1$, 即 Ω_1 是 Q_1 的一个非空开子集.

设

$$\Omega_2 = \{x \in Q_1 | Ax \not\geq x_1 \ \ 且 \ \ Ax \not\leq y_2\}.$$

则 Ω_2 是 Ω 的一个开子集, 且 $\Omega_2 \cap \Omega_1 = \emptyset$. 既然 $\frac{x_1+y_2}{2} + x_2 \in \Omega_2$, 可得 $\Omega_2 \neq \emptyset$.

不失一般性, 假定 A 在 $\overline{\Omega}\backslash(\Omega_1 \cup \Omega_2) \supset \partial\Omega \cup \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$ 上无不动点, 其中 $\partial\Omega$, $\partial\Omega_1$, $\partial\Omega_2$ 分别表示 Ω, Ω_1, Ω_2 相对于 Q_1 的边界.

现在, 我们证明

$$y \neq tAy + (1-t)Ax_2, \quad y \in \partial\Omega_1, \quad t \in [0,1]. \tag{3.2.1}$$

设 (3.2.1) 不成立, 则存在 $y_0 \in \partial\Omega_1$ 且 $t_0 \in [0,1]$ 使得

$$y_0 = t_0 Ay_0 + (1-t_0)Ax_2.$$

故 $y_0 \le Ay_0 \le y_2$. 基于 A 的增性, 有

$$y_0 \le Ay_0 \le \cdots \le A^{n_1}y_2 \le y_2 - \lambda_1 e.$$

这意味着 $y_0 \in \Omega_1$, 与 $y_0 \in \partial\Omega_1$ 相矛盾. 故 (3.2.1) 成立. 由不动点指数的同伦不变性和正规性, 可得

$$i(A, \Omega_1, Q_1) = i(Ax_2, \Omega_1, Q_1) = 1. \tag{3.2.2}$$

设

$$Q_2 = \{x \in Q | x \le y_1\}, \quad \Omega_3 = \{x \in Q_2 | 存在 \ \ \zeta > 0 \ \ 使得 \ \ Ax \ge x_1 + \zeta e\}.$$

由 A 的增性和条件 (iv), 可得

$$Ay_1 \ge A(Ay_1) \ge A(A^2y_1) \ge \cdots \ge A^{m_1}y_1 \ge A^{m_1}x_1 \ge x_1 + \mu_1 e,$$

这意味着 $Ay_1 \in \Omega_3$.

我们将证明

$$i(A, \Omega_3,\ Q_2) = 1. \tag{3.2.3}$$

设存在 $x_0 \in \partial\Omega_3$ 和 $\bar{t}_0 \in [0, 1]$ 使得

$$x_0 = \bar{t}_0 A x_0 + (1 - \bar{t}_0) A y_1.$$

则 $x_0 \geq Ax_0 \geq x_1$. 基于 A 的增性, 有

$$x_0 \geq Ax_0 \geq \cdots \geq A^{m_1}x_0 \geq A^{m_1}x_1 \geq x_1 + \mu_1 e.$$

因此 $x_0 \in \Omega_3$, 这与 $x_0 \in \partial\Omega_3$ 矛盾. 根据不动点指数的同伦不变性和正规性, 有

$$i(A, \Omega_3, Q_2) = i(Ay_1, \Omega_3, Q_2) = 1.$$

接下来, 我们将证明

$$x \neq Ax + te, \quad \forall\, t \geq 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{3.2.4}$$

假设存在 $\tilde{x}_0 \in \partial\Omega$ 且 $\tilde{t}_0 > 0$ 使得 $\tilde{x}_0 = A\tilde{x}_0 + \tilde{t}_0 e$. 故 $\tilde{x}_0 \geq x_1 + \tilde{t}_0 e \geq x_1$. 进而

$$\tilde{x}_0 \geq A\tilde{x}_0 \geq A^{m_1}\tilde{x}_0 \geq A^{m_1}x_1 \geq x_1 + \mu_1 e.$$

从条件 (iii) 可知, 对于 $\epsilon = \frac{\mu_1}{2}$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $x \in Q_1$ 及 $\|x - \tilde{x}_0\| < \delta$ 时, 有 $Ax \geq A\tilde{x}_0 - \frac{\mu_1}{2}e \geq x_1 + \frac{\mu_2}{2}e$. 既然 $\tilde{x}_0 \in \partial\Omega$, 那么, 存在 $\{z_k\} \subset \Omega$ 使得 $z_k \longrightarrow \tilde{x}_0$. 令 $k \longrightarrow \infty$, 有 $Az_k \geq x_1 + \frac{\mu_1}{2}e$, 这与 $\{z_k\} \subset \Omega$ 矛盾. 故 (3.2.4) 成立. 由不动点指数的缺方向性, 可得

$$i(A, \Omega, Q_1) = 0. \tag{3.2.5}$$

因此, 由 (3.2.2), (3.2.5) 与不动点指数的可加性, 有

$$i(A, \Omega_2, Q_1) = i(A, \Omega, Q_1) - i(A, \Omega_1, Q_1) = 0 - 1 = -1. \tag{3.2.6}$$

设

$$\Omega_4 = \{x \in Q_2 | Ax \not\leq y_2\}.$$

采用与 (3.2.5) 相同的方法, 有

$$i(A, \Omega_4, Q_2) = 0. \tag{3.2.7}$$

设

$$\Omega_5=\{x\in Q_2|Ax\not\geq x_1,\ \ 且\ \ Ax\not\leq y_2\}.$$

再应用与 (3.2.6) 相同的方法, 有

$$i(A,\Omega_5,Q_2)=i(A,\Omega_4,Q_2)-i(A,\Omega_3,Q_2)=-1. \tag{3.2.8}$$

由 (3.2.2), (3.2.3), (3.2.6) 和 (3.2.8) 可得, A 至少有四个不动点 x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^* 使得 $x_1^*\in\Omega_1$, $x_2^*\in\Omega_3$, $x_3^*\in\Omega_2$, $x_4^*\in\Omega_5$. 利用与 (3.2.6) 及 (3.2.8) 相同的方法, 可知 A 存在第五个不动点 $x_5^*\in\Omega_6$, 第六个不动点 $x_6^*\in\Omega_7$, 其中

$$\Omega_6=\{x\in Q|x\geq x_1,\ x\not\geq x_2,\ \ 且\ \ x\not\leq y_1\},$$

$$\Omega_7=\{x\in Q|x\leq y_2,\ x\not\geq x_2,\ \ 且\ \ x\not\leq y_1\}.$$

推论 3.2.1 设 P 是一个体锥, $A:P\longrightarrow P$ 是一个凝聚的增算子, $A(P)\subset Q$, 并且定理 3.2.1 中的条件 (i) 和 (ii) 均满足. 此外, x_1, x_2, y_1, $y_2\in P^\circ\cap Q$, 存在 γ_1, $\gamma_2>0$ 使得 $x_1\leq\gamma_1 h$, $x_2\leq\gamma_2 h$. 则 A 在 P 中至少有六个不动点.

证明 既然 x_1, $y_2\in P^\circ$, 根据定理 3.2.1 的证明, 我们仅需重新定义

$$\Omega_1=\{x\in Q_1|x\ll y_2\},\ \ \Omega_3=\{x\in Q_2|x\gg x_1\},$$

Ω, Ω_2, Ω_4, Ω_5 保持不变. 则 Ω_1 仍然是 Ω 的非空开子集, 并且 $\Omega_1\cap\Omega_2=\emptyset$.

假设存在 $y_0\in\partial\Omega_1$ 及 $t_0\in[0,1)$ 使得

$$y_0=t_0Ay_0+(1-t_0)Ax_2.$$

故 $y_0<t_0y_2+(1-t_0)y_2=y_2$, 这意味着 $y_0\in\Omega_1$. 这是一个矛盾.

根据不动点指数的同伦不变性和正规性, 有

$$i(A,\Omega_1,Q_1)=1.$$

同理, 可得

$$i(A,\Omega_3,Q_2)=1.$$

余下的证明同定理 3.2.1 的证明一样, 证毕.

由定理 3.2.1 和推论 3.2.1, 可证明以下定理:

定理 3.2.2 假设 $A:P\longrightarrow P$ 是一个凝聚的增算子, $A(P)\subset Q$, 并且定理 3.2.1 中的条件 (ii), (iii) 与 (iv) 均满足. 若以下条件成立:

(i) 存在 $x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2 \in P$, 使得 $x_1 < Ax_1,\ Ay_1 < y_1,\ x_2 < Ax_2,\ Ay_2 < y_2,\ x_1 \not\leq y_1,\ x_2 \not\leq y_2,\ x_1 < y_2$.
则 A 在 P 中至少有三个不动点 $\varphi_i(i=1,2,3)$, 且满足

$$x_1 \not\leq \varphi_1 \not\leq y_1,\quad \varphi_1 < y_2;$$

$$x_1 < \varphi_2 < y_2;\quad x_2 \not\leq \varphi_3 \not\leq y_2,\quad \varphi_3 > x_1.$$

§3.3 对积分方程的应用

在本节中, 我们考察超线性 Hammerstein 型积分方程

$$A\varphi(x) = \int_G k(x,y)f(y,\varphi(y))dy = \varphi(x),\quad \forall\ x \in G, \tag{3.3.1}$$

其中 G 为 $\mathbb{R}^N$ 中的有界闭区域. 为方便起见, 列出以下假设:

(H_1) $k: G\times G \longrightarrow \mathbb{R}^1$ 是非负连续函数, 且在 $G\times G$ 上 $k \not\equiv 0$, 存在一个闭集 $G_0 \subset G$, $mesG_0 > 0$, 及 $\epsilon_0 > 0$ 使得 $k(x,y) \geq \epsilon_0 k(z,y),\quad \forall\ x \in G_0,\ y,\ z \in G$;

(H_2) 存在 $b > 0$ 使得

$$\int_{G_0} k(x,y)dy \geq b\int_G k(x,y)dy,\ \forall\ x \in G;$$

(H_3) $f: G\times\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ 连续, $f(x,0)=0$, 对每一个 $x \in G$, $f(x,\varphi)$ 关于 φ 单调增加, 且 $\lim\limits_{\varphi\to+\infty}\min\limits_{x\in G_0} f(x,\varphi) = +\infty$.

令 $E = C(G)$ 表示在 G 上所有连续函数构成的空间,

$$P = \{\varphi \in E | \varphi(x) \geq 0,\quad \forall\ x \in G\}.$$

则 E 是实 Banach 空间, P 是 E 中的正规锥, 且 $E = P - P$. 定义 $Q = \{\varphi \in E | \min\limits_{x\in G_0}\varphi(x) \geq \epsilon_0\|\varphi\|\}$, 其中 ϵ_0 同 (H_1) 中的定义一样, 则 Q 为 E 中的锥, 且 $Q \subset P$. 定义 $e(x) = \int_G k(x,y)dy,\quad \forall\ x \in G$, 则 $e \in P\backslash\{\theta\}$.

引理 3.3.1([41]) 假设条件 (H_1), (H_2), (H_3) 成立. 则 $A: P \longrightarrow P$ 是一个全连续的增算子, $A(P) \subset Q$, 且 $e \in Q$, 进而, 定理 3.2.1 中的条件 (ii) 和 (iii) 满足.

定理 3.3.1 假设条件 (H_1), (H_2), (H_3) 成立, 且以下条件满足:

(H_4) 存在 $u_1,\ u_2,\ v_1,\ v_2 \in P$ 使得 $u_1 < v_1,\ u_2 < v_2,\ u_1 < Au_1,\ Av_1 < v_1,\ u_2 < Au_2,\ Av_2 < v_2,\ u_1 \not\leq v_2,\ u_2 \not\leq v_1$;

(H_5) 对于每一个 $x \in G_0$, $f(x,\varphi)$ 关于 φ 严格单调增加.
则积分方程 (3.3.1) 至少有六个正解.

证明 根据引理 3.3.1, 我们仅需验证定理 3.2.1 中的条件 (i) 和 (iv) 满足. (H_4) 蕴含着 A^2v_2, Au_1, A^2v_1, $Au_2 \in Q$, 且

$$A(A^2v_2) \leq A^2v_2, \quad Au_1 \leq A(Au_1), \quad Au_1 \nleq A^2v_2,$$

$$A(A^2v_1) \leq A^2v_1, \quad Au_2 \leq A(Au_2), \quad Au_2 \nleq A^2v_1,$$

$Au_1 < A^2v_1$, $Au_2 < A^2v_2$. 故定理 3.2.1 中的条件 (i) 成立.

对于 $y \in G_0$, $Au_1(y) - u_1(y) > 0$, 结合条件 (H_5) 可知, 存在 $\delta > 0$ 使得当 $y \in G_0$ 时, 有 $f(y, Au_1(y)) - f(y, u_1(y)) \geq \delta > 0$. 因此, 我们可得

$$A(Au_1) - Au_1 = \int_G k(x,y)[f(y, Au_1(y)) - f(y, u_1(y))]dy \geq \delta b e(x), \quad \forall\, x \in G.$$

同理, 可得

$$A^2v_2 - A(A^2v_2) \geq \delta b e(x), \quad \forall\, x \in G.$$

$$A(Au_2) - Au_2 \geq \delta b e(x), \quad \forall\, x \in G.$$

$$A^2v_1 - A(A^2v_1) \geq \delta b e(x), \quad \forall\, x \in G.$$

易于验证

$$Au_1 \leq \|f(\cdot, u_1)\| e, \quad Au_2 \leq \|f(\cdot, u_2)\| e.$$

故定理 3.2.1 中的条件 (iv) 满足. 证毕.

§3.4 两个算子之和的多重不动点的存在性

定理 3.4.1 设以下条件满足:

(H_1) P 是实 Banach 空间 E 中的一个正规锥, N 是 P 的正规常数, $A : P \longrightarrow P$ 是一个严格集压缩映射, 且满足

$$\sup\{\|Ax\| : \ x \in P, \ \|x\| = 1\} < \frac{1}{N}; \tag{3.4.1}$$

(H_2) 存在算子 $A_i : P \longrightarrow P$ 使得

$$Ax \geq A_i x, \quad \forall\, x \in P, \quad i = 1, 2; \tag{3.4.2}$$

(H_3) A_1 是一个 τ_1-φ_1- 凹算子, 且

$$\lim_{t\to a^+}\tau_1(t)=0,\quad \overline{\lim_{t\to a^+}}\frac{\varphi_1(x,t)}{\tau_1(t)}>\frac{N}{\kappa_1},\quad \text{对 } x\in P^+ \text{ 一致成立,} \tag{3.4.3}$$

其中

$$\kappa_1=\inf\{\|A_1x\|:\ x\in P,\ \|x\|=1\}>0. \tag{3.4.4}$$

若存在一个正数 c 使得

$$\kappa_2=\inf\{\|A_2x\|:\ x\in P,\ \|x\|=c\}>0. \tag{3.4.5}$$

A_2 是一个 τ_2-φ_2- 凸算子, 并且

$$\lim_{t\to a^+}\tau_2(t)=0,\quad \underline{\lim_{t\to a^+}}\frac{\varphi_2(x,t)}{\tau_2(t)}<\frac{\kappa_2}{cN},\quad \text{对 } x\in P^+ \text{ 一致成立.} \tag{3.4.6}$$

则 A 在 P^+ 中至少有两个不动点 x_1^*, x_2^*, 使得 $\|x_1^*\|<1<\|x_2^*\|$.

证明 令 $T_r=\{x\in E:\ \|x\|=r\}$, $r>0$. 以下我们证明, 存在实数 r_1, r_2 使得 $0<r_1<1<r_2$, 并且

$$Ax\not\leq x,\quad \forall\, x\in T_{r_1}\cap P, \tag{3.4.7}$$

$$Ax\not\leq x,\quad \forall\, x\in T_{r_2}\cap P, \tag{3.4.8}$$

$$Ax\not\geq x,\quad \forall\, x\in T_1\cap P. \tag{3.4.9}$$

从 (3.4.3) 可知, 存在 $t_1\in(a,b)$ 使得

$$0<\tau_1(t_1)<1,\quad \varphi_1(x,t_1)>\frac{N\tau_1(t_1)}{\kappa_1},\quad \forall\, x\in P^+. \tag{3.4.10}$$

取 $r_1=\tau_1(t_1)$. 假设存在 $x_1\in T_{r_1}\cap P$ 使得 $Ax_1\leq x_1$. 由 A_1 的定义和 (3.4.2), 有

$$x_1\geq A(x_1)\geq A_1(x_1)=A_1\left(\tau_1(t_1)\frac{x_1}{\tau_1(t_1)}\right)\geq\varphi_1\left(\frac{x_1}{\tau_1(t_1)},t_1\right)A_1\left(\frac{x_1}{\tau_1(t_1)}\right),$$

再结合 P 的正规性和 (3.4.10), 可得

$$\|x_1\|\geq\frac{1}{N}\varphi_1\left(\frac{x_1}{\tau_1(t_1)},t_1\right)\left\|A_1\left(\frac{x_1}{\tau_1(t_1)}\right)\right\|>\frac{1}{N}\frac{N\tau_1(t_1)}{\kappa_1}\kappa_1=r_1,$$

这与 $x_1\in T_{r_1}\cap P$ 矛盾, 故 (3.4.7) 成立.

由 (3.4.6) 可知, 存在 $t_2 \in (a,b)$ 使得

$$0 < \tau_2(t_2) < \min\{1, c\}, \quad \varphi_2(x, t_2) < \frac{\kappa_2 \tau_2(t_2)}{cN}, \quad \forall\, x \in P^+. \tag{3.4.11}$$

取 $r_2 = \frac{c}{\tau_2(t_2)}$, 则 $r_2 > 1$. 进而, 假定存在 $x_2 \in T_{r_2} \cap P$ 使得 $Ax_2 \le x_2$, 于是 $\|\tau_2(t_2)x_2\| = c$. 由 A_2 的定义, 可得 $A_2(\tau_2(t_2)x_2) \le \varphi_2(x_2, t_2)A_2(x_2)$. 因此

$$A_2(x_2) \ge \frac{1}{\varphi_2(x_2, t_2)} A_2(\tau_2(t_2)x_2). \tag{3.4.12}$$

根据 (3.4.2), (3.4.12) 和 P 的正规性, 可得

$$\|x_2\| \ge \frac{1}{N} \frac{1}{\varphi_2(x_2, t_2)} \|A_2(\tau_2(t_2)x_2)\| > \frac{1}{N} \frac{cN}{\kappa_2} \frac{1}{\tau_2(t_2)} \kappa_2 = r_2,$$

与 $x_2 \in T_{r_2} \cap P$ 相矛盾, 故 (3.4.8) 成立.

假设存在 $x_3 \in T_1 \cap P$ 使得 $Ax_3 \ge x_3$. 从 (3.4.1) 可知 $1 = \|x_3\| \le N\|Ax_3\| < 1$, 产生矛盾, 故 (3.4.9) 成立.

由 (3.4.7), (3.4.8) 和 (3.4.9), 应用引理 3.1.1, 我们断言 A 在 P^+ 中至少存在两个不动点 x_1^*, x_2^* 使得 $r_1 < \|x_1^*\| < 1 < \|x_2^*\| < r_2$. 证毕.

在定理 3.4.1 中取 $(a,b) = (0,1)$ 且 $\tau_1(t) = \tau_2(t) = t$, 我们可获得以下推论.

推论 3.4.1 设定理 3.4.1 中的条件 (H_1) 满足. 算子 A 可写为以下形式 $A = A_1 + A_2$, 其中 $A_1 : P \longrightarrow P$ 是 φ_1- 凹算子, 且

$$\overline{\lim_{t \to 0^+}} \frac{\varphi_1(x,t)}{t} > \frac{N}{\kappa_1}, \quad 对\ x \in P^+\ 一致成立,$$

$A_2 : P \longrightarrow P$ 是 φ_2- 凸算子, 且

$$\underline{\lim_{t \to 0^+}} \frac{\varphi_2(x,t)}{t} < \frac{\kappa_2}{cN}, \quad 对\ x \in P^+\ 一致成立,$$

其中 N, κ_1, κ_2, c 与定理 3.4.1 中的定义一致. 则 A 在 P^+ 中至少有两个不动点 x_1^*, x_2^* 满足 $\|x_1^*\| < 1 < \|x_2^*\|$.

推论 3.4.2 设定理 3.4.1 中的条件 (H_1) 满足. 算子 A 可表示为 $A = A_1 + B_1 + A_2 + B_2$, 其中 $A_1 : P \longrightarrow P$ 是 φ_1- 凹算子, $A_2 : P \longrightarrow P$ 是 φ_2- 凸算子, 且 $B_i : P \longrightarrow P$ 是齐次算子 $(i = 1, 2)$. 若存在两个正数 q_i $(i = 1, 2)$ 使得

$$\overline{\lim_{t \to 0^+}} \frac{\varphi_1(x,t)}{t} > \frac{N - \kappa_1(1 - q_1)}{\kappa_1 q_1}, \quad \underline{\lim_{t \to 0^+}} \frac{\varphi_2(x,t)}{t} < \frac{\kappa_2 - cN(1 - q_2)}{cNq_2}, \tag{3.4.13}$$

对 $x \in P^+$ 一致成立,

$$A_i x \geq q_i(A_i x + B_i x)(i=1,2), \quad \forall\, x \in P, \tag{3.4.14}$$

其中 κ_1, κ_2, N, c 同定理 3.4.1 中的定义一致. 则 A 在 P^+ 中至少有两个不动点 x_1^*, x_2^* 满足 $\|x_1^*\| < 1 < \|x_2^*\|$.

证明 由 A_1 和 B_1 的定义可知, 对于任意给定的 $t \in (0,1)$ 与 $x \in P$, 有

$$\begin{aligned} A_1(tx) + B_1(tx) &= A_1(tx) + tB_1 x \\ &\geq \varphi_1(x,t) A_1 x + t(A_1 x + B_1 x - A_1 x) \\ &= [\varphi_1(x,t) - t] A_1 x + t(A_1 x + B_1 x) \\ &\geq [\varphi_1(x,t) - t] q_1 (A_1 x + B_1 x) + t(A_1 x + B_1 x) \\ &= [(\varphi_1(x,t) - t) q_1 + t](A_1 x + B_1 x). \end{aligned} \tag{3.4.15}$$

在 (3.4.15) 中, 我们应用了 (3.4.14).

由 (3.4.15) 和 (3.4.13), 可得

$$\overline{\lim_{t \to 0^+}} \frac{[\varphi_1(x,t) - t] q_1 + t}{t} = 1 + \left(\overline{\lim_{t \to 0^+}} \frac{\varphi_1(x,t)}{t} - 1 \right) q_1 > \frac{N}{\kappa_1}.$$

同理, 我们有

$$\begin{aligned} A_2(tx) + B_2(tx) &= A_2(tx) + tB_2 x \\ &\leq \varphi_2(x,t) A_2 x + t(A_2 x + B_2 x - A_2 x) \\ &= [\varphi_2(x,t) - t] A_2 x + t(A_2 x + B_2 x) \\ &\leq [\varphi_2(x,t) - t] q_2 (A_2 x + B_2 x) + t(A_2 x + B_2 x) \\ &= [(\varphi_2(x,t) - t) q_2 + t](A_2 x + B_2 x), \end{aligned}$$

结合 (3.4.13), 有

$$\underline{\lim_{t \to 0^+}} \frac{[\varphi_2(x,t) - t] q_2 + t}{t} = 1 + \left(\underline{\lim_{t \to 0^+}} \frac{\varphi_2(x,t)}{t} - 1 \right) q_2 < \frac{\kappa_2}{cN}.$$

根据推论 3.4.1, 可获得推论 3.4.2 的结论成立.

将 [49] 中的推论 3.1 和本节的推论 3.4.1 相结合, 我们可得到以下两个推论.

推论 3.4.3([49]) 设定理 3.4.1 中的条件 (H_1) 满足. 算子 A 可表示为 $A = A_1 + A_2$, 其中 $A_1 : P \longrightarrow P$ 是单增的 e- 凹算子, $A_2 : P \longrightarrow P$ 是单增的 e- 凸算子. 若存在 $\epsilon_i > 0$ $(i = 1, 2)$ 使得

$$A_i x \geq \epsilon_i \|A_i x\| e, \quad \forall\, x \in P^+,$$

$$\overline{\lim_{t\to 0^+}} \zeta_1(x,t) > \frac{N^2}{\epsilon_1 \|A_1(\epsilon_0 e)\| \|e\|} - 1, \text{ 对 } x \in C_e \text{ 一致成立}, \tag{3.4.16}$$

$$\underline{\lim_{t\to 0^+}} \zeta_2(x,t) > 1 - \frac{1}{N^2}\epsilon_2 \|A_2(\epsilon_0 e)\| \|e\|, \text{ 对 } x \in C_e \text{ 一致成立}. \tag{3.4.17}$$

则 A 在 P^+ 中至少有两个不动点 x_1^*, x_2^* 满足

$$\|x_1^*\| < 1 < \|x_2^*\|, \quad \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\} \|x_i^*\| e \leq x_i^* \leq M_i e, \quad \exists\, M_i > 0, \ i = 1, 2. \tag{3.4.18}$$

推论 3.4.4([49]) 设定理 3.4.1 中的条件 (H_1) 满足. 算子 A 可表示为 $A = A_1 + A_2 + A_3$, 其中 $A_i : P \longrightarrow P$ $(i = 1, 2, 3)$, A_1 是 α- 凹算子 $(0 < \alpha < 1)$, A_2 是 β- 凸算子 $(\beta > 1)$. 若存在正数 c_i $(i = 1, 2)$ 使得

$$\overline{\kappa}_i = \inf\{\|A_i x\| : \ x \in P, \ \|x\| = c_i\} > 0, \quad i = 1, 2.$$

则 A 在 P^+ 中至少有两个不动点 x_1^*, x_2^* 满足 $\|x_1^*\| < 1 < \|x_2^*\|$.

§3.5 对一类多点边值问题的应用

多点边值问题产生于众多应用科学. 例如, 由 N 部分不同密度组成的均匀截面的悬链线的振动可抽象为多点边值问题, 参见文 [59]. 弹性稳定性问题可用多点边值问题来建模, 参见文 [60]. 国内有多篇博士学位论文专门研究常微分方程的多点边值问题, 例如, 江卫华博士在其博士学位论文 [61] 即围绕这一主题展开了详细的讨论.

近年来, 二阶常微分方程的多点边值问题受到了广泛的关注, 参见 [62-71], 马如云教授在专著 [62] 中对这一课题进行了较为系统和全面的论述. 葛渭高教授在其专著 [63] 中也进行了细致的讨论. 这里的多点边值问题, 是指方程的定解条件不仅依赖于解在区间端点上的取值, 而且依赖于解在区间内部的某一些点上的值 [62]. [62] 同时指出, 在描述一些重要的力学和电学现象的过程中, 一般需要对方程

$$u''(t) = f(t, u(t), u'(t)), \quad t \in (0, 1)$$

附加 Sturm-Liouville 边值条件及周期边值条件等, 然而若考虑实际测量的误差及相关因素的干扰, 定解条件可加上扰动项转变为多点边值问题, 从而对实际现象进行更为精确的刻画.

在本节中, 我们将定理 3.4.1 应用到如下边值问题

$$\begin{cases} -u'' + k^2 u = g(t,u), \quad a < t < b, \\ u'(a) = 0, \quad u(b) = \sum\limits_{i=1}^{m-2} \alpha_i u(\eta_i), \end{cases} \tag{3.5.1}$$

其中 $k > 0$, $m > 2$, $\eta_i \in (a,b)$, $\alpha_i \in \mathbb{R}^+ (i = 1, 2, \cdots, m-2)$ 为给定的数, $g : (a,b) \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ 连续.

文 [71] 讨论了边值问题 (3.5.1) 对应的线性问题的 Green 函数, 并计算出了具体的表达式, 参见 [71, 定理 3.5]. 关于多点边值问题的 Green 函数, 文 [63] 进行了更一般的研究, 即文 [63] 的第一章的第三节.

文 [50] 应用其建立的 τ-φ- 凸算子不动点定理, 获得了如下结果:

定理 3.5.1([50]) 设 $\cosh(k(b-a)) > \sum\limits_{i=1}^{m-2} \alpha_i \cosh(k(\eta_i - a))$, 存在 $\beta_2 \geq \beta_1 > 1$, 使得对于任给的 $0 < r < 1$, 有

$$r^{\beta_2} g(t,u) \leq g(t,ru) \leq r^{\beta_1} g(t,u), \qquad \forall\ (t,u) \in (a,b) \times \mathbb{R}^+,$$

$$0 < \int_a^b (b-t) g(t,1) dt < +\infty,$$

其中 $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. 则边值问题 (3.5.1) 至少有一个连续正解.

为获得我们的主要结果, 需要以下引理:

引理 3.5.1([50, 71]) 假设函数 $f(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 此外, 设 $k > 0$, $\cosh(k(b-a)) \neq \sum\limits_{i=1}^{m-2} \alpha_i \cosh(k(\eta_i - a))$. 则以下线性边值问题

$$\begin{cases} -u'' + k^2 u = f(t), \quad a \leq t \leq b, \\ u'(a) = 0, \quad u(b) = \sum\limits_{i=1}^{m-2} \alpha_i u(\eta_i) \end{cases}$$

有唯一解

$$u(t) = \int_a^b K(t,s) f(s) ds,$$

其中格林函数为

$$K(t,s)=G(t,s)+\frac{\cosh(k(t-a))}{\cosh(k(b-a))-\sum\limits_{i=1}^{m-2}\alpha_i\cosh(k(\eta_i-a))}\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i G(\eta_i,s), \tag{3.5.2}$$

这里

$$G(t,s)=\begin{cases}\dfrac{\cosh(k(s-a))\sinh(k(b-t))}{k\cosh(k(b-a))}, & a\le s\le t,\\ \dfrac{\cosh(k(t-a))\sinh(k(b-s))}{k\cosh(k(b-a))}, & t\le s\le b.\end{cases} \tag{3.5.3}$$

引理 3.5.2([50]) 对于任意给定的 t, $s\in[a,b]$, 格林函数 $K(t,s)$ 满足

$$M_1\frac{b-s}{\cosh(k(b-a))}\le M_1G(s,s)\le K(t,s)\le M_2G(s,s)\le M_2\frac{\sinh(k(b-a))}{k(b-a)}(b-s), \tag{3.5.4}$$

其中 G 由 (3.5.3) 给出,

$$M_1=\frac{k\sum\limits_{i=1}^{m-2}\alpha_iG(\eta_i,\eta_i)}{\sinh(k(b-a))\left[\cosh(k(b-a))-\sum\limits_{i=1}^{m-2}\alpha_i\cosh(k(\eta_i-a))\right]}, \tag{3.5.5}$$

$$M_2=1+\frac{\cosh(k(b-a))\sum\limits_{i=1}^{m-2}\alpha_i}{\cosh(k(b-a))-\sum\limits_{i=1}^{m-2}\alpha_i\cosh(k(\eta_i-a))}. \tag{3.5.6}$$

我们的主要结果为以下定理:

定理 3.5.2 设 $\cosh(k(b-a))>\sum\limits_{i=1}^{m-2}\alpha_i\cosh(k(\eta_i-a))$, 存在 $\overline{\beta}>1$ 使得对于任意给定的 $0<r<1$, 有

$$r^{\overline{\beta}}g(t,u)\le g(t,ru),\quad \forall\ (t,u)\in(a,b)\times\mathbb{R}^+. \tag{3.5.7}$$

进而, g 可表示为 $g=g_1+g_2$, 对于固定的 $t\in[a,b]$, $g_i(t,u)$ $(i=1,2)$ 关于 u 单调增加, 且

$$\int_a^b(b-s)g_i(s,1)ds>0\ (i=1,2),\quad \int_a^b(b-s)g(s,1)ds<\frac{k(b-a)}{M_2\sinh(k(b-a))}, \tag{3.5.8}$$

其中 M_2 由 (3.5.6) 给出. 此外, 存在函数 $\tau_1:(a,b)\longrightarrow(0,1)$ 和函数 $\varphi_1:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}^+$ 及 $\varphi_1(t)>\tau_1(t)$, $\forall\, t\in(a,b)$ 使得

$$g_1(t,\tau_1(\lambda)u)\geq\varphi_1(\lambda)g_1(t,u),\quad \forall\, t\in(a,b),\ u\in\mathbb{R}^+. \tag{3.5.9}$$

存在 $\lambda_1\in(a,b)$ 使得 $\tau_1(\lambda_1)=\frac{M_1}{M_2}$, 且

$$\lim_{t\to a^+}\tau_1(t)=0,\quad \overline{\lim_{t\to a^+}}\frac{\varphi_1(t)}{\tau_1(t)}>\frac{\cosh(k(b-a))}{\varphi_1(\lambda_1)M_1\displaystyle\int_a^b(b-s)g_1(s,1)ds}. \tag{3.5.10}$$

存在函数 $\tau_2:(a,b)\longrightarrow(0,1)$ 与函数 $\varphi_2:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}^+$ 及 $\varphi_2(t)<\tau_2(t)$, $\forall\, t\in(a,b)$ 使得

$$g_2(t,\tau_2(\lambda)u)\leq\varphi_2(\lambda)g_2(t,u),\quad \forall\, t\in(a,b),\ u\in\mathbb{R}^+. \tag{3.5.11}$$

存在 $\lambda_2\in(a,b)$ 使得 $\tau_2(\lambda_2)=\frac{M_2}{M_1c}$, 且

$$\lim_{t\to a^+}\tau_2(t)=0,\quad \lim_{t\to a^+}\frac{\varphi_2(t)}{\tau_2(t)}<\frac{M_1\displaystyle\int_a^b(b-s)g_2(s,1)ds}{c\varphi_2(\lambda_2)\cosh(k(b-a))}, \tag{3.5.12}$$

其中 $c>\frac{M_2}{M_1}$. 则边值问题 (3.5.1) 至少有两个非平凡的非负解 $u_1(t)$ 和 $u_2(t)$, 且满足

$$\max_{t\in[a,b]}u_1(t)<1<\max_{t\in[a,b]}u_2(t),\quad u_i(t)\geq\frac{M_1}{M_2}\|u_i\|,\quad i=1,2,$$

其中 M_1 与 M_2 分别由 (3.5.5) 和 (3.5.6) 确定.

证明 令 $E=C[a,b]$, $\|\cdot\|$ 表示 E 中的上确界范数,

$$P=\left\{u(t)\in E:u(t)\geq\frac{M_1}{M_2}\|u\|\right\}.$$

则 P 为 E 中的正规锥, 其正规常数 $N=1$.

我们定义算子 $A:P\longrightarrow E$ 如下:

$$Au(t)=\int_a^b K(t,s)g(s,u(s))ds,\quad \forall\, u\in P,$$

其中 $K(t,s)$ 由 (3.5.2) 确定. 根据引理 3.5.1, 易于验证 u 是问题 (3.5.1) 的解当且仅当 $u=Au$.

由引理 3.5.2 可知, $A: P \longrightarrow P$. 易证 A 全连续, 且为增算子. 由 A 的增性, (3.5.4) 与 (3.5.7), 可得

$$\begin{aligned} Au(t) &\le \int_a^b K(t,s)g(s,\|u\|)ds \\ &\le \int_a^b K(t,s)g\left(s,(\|u\|+1)^{\overline{\beta}}\right)ds \\ &\le M_2(1+\|u\|)^{\overline{\beta}}\frac{\sinh(k(b-a))}{k(b-a)}\int_a^b (b-s)g(s,1)ds, \quad \forall\, u\in P. \end{aligned}$$

因此, 由 (3.5.8), $Au(t)$ 为良定义.

从 (3.5.4) 和 (3.5.8) 可知

$$Au(t) \le M_2\frac{\sinh(k(b-a))}{k(b-a)}\int_a^b (b-s)g(s,1)ds < 1, \quad \forall\, 0\le u\le 1,$$

于是, 我们有

$$\|Au\| < 1 = \frac{1}{N}, \quad \forall\, u\in P, \quad \|u\|=1,$$

这蕴含着 (3.4.1) 满足.

令

$$A_1u(t) = \int_a^b K(t,s)g_1(s,u(s))ds, \quad A_2u(t) = \int_a^b K(t,s)g_2(s,u(s))ds, \quad \forall\, u\in P.$$

从 (3.5.9) 与 (3.5.11) 可知 A_1 是 τ_1-φ_1- 凹算子, 且 A_2 是 τ_2-φ_2- 凸算子.

对于任意给定的 $u\in P\cap T_1$, 我们有 $u(t)\ge \frac{M_1}{M_2}\|u\| = \frac{M_1}{M_2}$. 既然存在 $\lambda_1\in(a,b)$ 使得 $\tau_1(\lambda_1)=\frac{M_1}{M_2}$, 由 (3.5.9) 可得

$$g_1\left(t,\frac{M_1}{M_2}\right) = g_1(t,\tau_1(\lambda_1)) \ge \varphi_1(\lambda_1)g_1(t,1), \quad \forall\, t\in(a,b),$$

结合 (3.5.4) 与 (3.5.8), 有

$$\begin{aligned} A_1u(t) &\ge \int_a^b K(t,s)g_1\left(s,\frac{M_1}{M_2}\right)ds \\ &\ge \varphi_1(\lambda_1)\int_a^b K(t,s)g_1(s,1)ds \\ &\ge \varphi_1(\lambda_1)\frac{M_1}{\cosh(k(b-a))}\int_a^b (b-s)g_1(s,1)ds \\ &> 0, \quad \forall\, u(t)\in P\cap S_1. \end{aligned}$$

于是

$$\kappa_1 = \inf\{\|A_1 x\| : x \in P, \|x\| = 1\} = \varphi_1(\lambda_1)\frac{M_1}{\cosh(k(b-a))}\int_a^b (b-s)g_1(s,1)ds.$$

故由 (3.5.10), 可知

$$\overline{\lim_{t\to a^+}}\frac{\varphi_1(t)}{\tau_1(t)} > \frac{1}{\kappa_1}.$$

对于任意给定的 $u \in P \cap T_c$, 我们有 $u(t) \geq \frac{M_1}{M_2}\|u\| = \frac{M_1}{M_2}c$. 既然 $c > \frac{M_2}{M_1}$, 且存在 $\lambda_2 \in (a,b)$ 使得 $\tau_2(\lambda_2) = \frac{M_2}{M_1 c}$, 从 (3.5.11) 可得

$$g_2\left(t, \frac{M_1}{M_2}c\right) \geq \frac{1}{\varphi_2(\lambda_2)}g_2(t,1), \quad \forall\, t \in (a,b),$$

结合 (3.5.4) 与 (3.5.8), 我们有

$$\begin{aligned} A_2 u(t) &\geq \int_a^b K(t,s)g_2\left(s, \frac{M_1}{M_2}c\right)ds \\ &\geq \frac{M_1}{\varphi_2(\lambda_2)\cosh(k(b-a))}\int_a^b (b-s)g_2(s,1)ds \\ &> 0, \quad \forall\, u(t) \in P \cap T_c. \end{aligned}$$

故

$$\kappa_2 = \inf\{\|A_2 x\| : x \in P,\ \|x\| = c\} = \frac{M_1}{\varphi_2(\lambda_2)\cosh(k(b-a))}\int_a^b (b-s)g_2(s,1)ds.$$

因此, 由 (3.5.12), 可得

$$\underline{\lim_{t\to a^+}}\frac{\varphi_2(t)}{\tau_2(t)} < \frac{\kappa_2}{c}.$$

定理 3.4.1 中的所有条件均满足, 根据定理 3.4.1, 可得定理 3.5.2 的结论成立. 证毕.

例子 3.5.1 假设 $k - M_2\sinh(k(b-a)) > 0$. 考察以下边值问题

$$\begin{cases} -u'' + k^2 u = \frac{u^{\frac{1}{3}}}{b-t} + \frac{xu^5}{b-t}, \quad a < t < b, \\ u'(a) = 0, \quad u(b) = \sum\limits_{i=1}^{m-2}\alpha_i u(\eta_i), \end{cases} \tag{3.5.13}$$

其中 $0 < x < \frac{k - M_2\sinh(k(b-a))}{M_2\sinh(k(b-a))}$.

在此例子中, 取 $g_1(t,u) = \frac{1}{b-t}u^{\frac{1}{3}}$, $g_2(t,u) = \frac{x}{b-t}u^5$, $\tau_1(t) = \tau_2(t) = \frac{t-a}{b-a}$, $\varphi_1(t) = [\tau_1(t)]^{\frac{1}{2}}$, $\varphi_2(t) = [\tau_2(t)]^3$. 则 $\varphi_1(t) > \tau_1(t)$, $\varphi_2(t) < \tau_2(t)$, $t \in (a,b)$. 对于 $u \geq 0$, 易于检验

$$g_1(t,\tau_1(\lambda)u) = \frac{1}{b-t}\left(\frac{\lambda-a}{b-a}u\right)^{\frac{1}{3}} \geq \left(\frac{\lambda-a}{b-a}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{b-t}u^{\frac{1}{3}} = \varphi_1(\lambda)g_1(t,u),\ t \in (a,b),$$

$$\lim_{t\to a^+}\tau_1(t) = 0, \qquad \overline{\lim_{t\to a^+}}\left(\frac{t-a}{b-a}\right)^{-\frac{1}{2}} = +\infty.$$

$$g_2(t,\tau_2(\lambda)u) = \frac{x}{b-t}[\tau_2(\lambda)]^5u^5 \leq [\tau_2(\lambda)]^3\frac{x}{b-t}u^5 = \varphi_2(\lambda)g_2(t,u), \quad t \in (a,b),$$

$$\lim_{t\to a^+}\tau_2(t) = 0, \qquad \underline{\lim_{t\to a^+}}[\tau_2(t)]^2 = 0.$$

进而, 我们可得

$$\int_a^b (b-s)\left(\frac{1}{b-s} + \frac{x}{b-s}\right)ds < \frac{k(b-a)}{M_2\sinh(k(b-a))}.$$

选取 $\overline{\beta} = 7$, 对于任意给定的 $0 < r < 1$, 我们有

$$r^7\left(\frac{1}{b-t}u^{\frac{1}{3}} + \frac{x}{b-t}u^5\right) \leq \frac{1}{b-t}(ru)^{\frac{1}{3}} + \frac{x}{b-t}(ru)^5.$$

由定理 3.5.2 可知, 边值问题 (3.5.13) 至少有两个非平凡的非负解 $u_1(t)$ 与 $u_2(t)$, 且具有定理 3.5.2 中的结论.

注记 3.5.1 在上述例子中, 通过应用我们得出的抽象结果, 讨论了一类多点边值问题的两个解的存在性, 此处的非线性项为 τ_1-φ_1- 凹函数和 τ_2-φ_2- 凸函数之和. 这一结果无法用 [50, 63-71] 的方法获得.

第四章　非线性算子方程的变号解及其应用

§4.1　引言

受一些生态问题的启发, 非线性偏微分方程的变号解受到关注 [72-75]. 注意到上述文献的证明均依赖于临界点理论. 然而, 一些具体问题不具有变分结构, 如常微分方程及更一般的时间尺度上的动力学方程的非局部问题, 在完备的正交特征函数系建立之前, 临界点理论难以奏效. 为克服这一困难, 文 [35] 借助于锥理论并结合一致正条件研究了非线性算子方程变号解的存在性, 主要结果如下:

定理 4.1.1([35]) 设 E, X 为 Banach 空间, $P \subset E$ 为正规体锥, $Q \subset X$ 为锥. 算子 $A : E \longrightarrow E$ 是全连续算子, A 可以表示成 $A = KF$ 的形式, 其中 $F : E \longrightarrow X$ 为严格增算子, 且满足 $F\theta = \theta$, $K : X \longrightarrow E$ 为线性算子且是强正的. 再设

(i) A'_θ 存在且为强正的, $r(A'_\theta) > 1$, 1 不是 A'_θ 的特征值, 且 A'_θ 的小于 1 的全部特征值的代数重数之和为偶数;

(ii) 存在 $u^* \in P^\circ$ 及常数 $\beta > 0$, 使得

$$Kx \geq \beta \|Kx\| u^*, \qquad \forall\, x \in Q;$$

(iii) 存在 $u_1 \in -P \backslash \{\theta\}$, 满足 $u_1 \leq Au_1$.

则算子 A 至少有一个变号解与一个负解.

随后, 文 [76] 考察了以下三点边值问题的变号解:

$$\begin{cases} x''(t) + f(x(t)) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1, \\ x(0) = 0, \qquad \alpha x(\eta) = x(1), \end{cases} \tag{4.1.1}$$

其中 $0 < \alpha < 1$, $0 < \eta < 1$. 为叙述方便, 列一些假设条件如下:

(A_1) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 连续且严格增, $f(0) = 0$;

(A_2) 存在一个正整数 n_0 使得

$$\lambda_{2n_0} < \beta_0 < \lambda_{2n_0+1},$$

这里 $\beta_0 = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$, 且

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \lambda_{n+1} < \cdots$$

是方程 $\sin\sqrt{x}=\alpha\sin\eta\sqrt{x}$ 的正解序列;

(A_3) $\lim\limits_{|x|\to\infty}\frac{f(x)}{x}<2(1-\alpha\eta)$.

其主要结果为:

定理 4.1.2([76]) 假设条件 (A_1)-(A_3) 成立. 那么问题 (4.1.1) 至少有一个变号解. 进一步, 问题 (4.1.1) 至少有一个正解和一个负解.

文 [77] 扩展了定理 4.1.2. 文 [77] 的主要结果为:

定理 4.1.3([77]) 设 P 为实 Banach 空间 E 中的正规体锥. 算子 $A:E\longrightarrow E$ 可以表示成 $A=KF$ 的形式, 其中 $F:E\longrightarrow E$ 为非线性全连续的有界算子, $K:E\longrightarrow E$ 为线性全连续算子. 再设

(i) $K:E\longrightarrow E$ 是 e- 正、e- 连续且全连续, 其单增的正特征值序列为 $\{\lambda_n\}$, 并且每一个特征值的代数重数均为 1;

(ii) $F:E\longrightarrow E$ 严格增、有界且连续, $F(\theta)=\theta$, F 在 θ 点 Fréchet 可微, $F'_\theta=\beta_0 I$, 其中 β_0 为正数, I 为 E 上的恒等算子. 对于某个正整数 n_0, 有 $\beta_0\in(1/\lambda_{2n_0+1},1/\lambda_{2n_0})$;

(iii) 存在 $u_1\in(-P^\circ)$, $v_2\in P^\circ$ 使得 $u_1\leq Au_1$, $Av_2\leq v_2$.

则算子方程 $Ax=x$ 至少有四个解, 其中一个零解, 一个负解, 一个正解和一个变号解.

定理 4.1.3 不仅获得了抽象算子方程的一般性结果, 而且将其用于边值问题 (4.1.1) 时, 减弱了条件 (A_1) 与 (A_3). 详见文 [77] 中的定理 3.1. 2007 年, 文 [78] 同样将定理 4.1.2 的条件 (A_1)-(A_3) 抽象了出来, 其主要结论为:

定理 4.1.4([78]) 令 P 为实 Banach 空间 E 中的正规锥, $A:E\longrightarrow E$ 为全连续的增算子, 且在 E 上 e- 连续. 再设

(i) $A(\theta)=\theta$, A 在 θ 点 Fréchet 可微, 1 不是 A'_θ 的一个特征值, 且孤立零点指数 $\mathrm{ind}(I-A'_\theta,\theta)=1$;

(ii) 存在 $u_0\in(-P)\backslash\{\theta\}$ 且 $v_0\in P\backslash\{\theta\}$ 使得 $u_0\leq Au_0$ 且 $Av_0\leq v_0$. 存在 $\beta>0$ 使得 $u_0\leq-\beta e$ 及 $\beta e\leq v_0$;

(iii) 存在 $u_1\neq v_0$, $v_1\neq u_0$ 且 $\sigma>0$ 使得 $\sigma e\leq u_1$ 且 $v_1\leq-\sigma e$. 存在 $\delta>0$ 使得 $u_1+\delta e\leq Au_1$ 且 $Av_1\leq v_1-\delta e$, 进而, 对于所有的 $x\in F^+=\{x\in P\backslash\{\theta\}:Ax=x\}$, 有 $u_1\leq x$, 对于 $x\in F^-=\{x\in(-P)\backslash\{\theta\}:Ax=x\}$, 有 $x\leq v_1$.

则算子 A 至少有三个非零不动点, 一个为正不动点, 另一个为负不动点, 第三个为变号不动点.

定理 4.1.5([78]) 设 P 为实 Banach 空间 E 中的正规锥. 算子 $A: E \longrightarrow E$ 可以表示成 $A = KF$ 的形式, 其中 $F: E \longrightarrow E$ 为连续且有界的增算子, $K: E \longrightarrow E$ 为正线性全连续算子, 且在 E 上 e- 连续. 再设

(i) $F(\theta) = \theta$, F 在 θ 点 Fréchet 可微, 并且 KF'_θ 有一个特征值 $\lambda_0 < 1$, 相应的特征函数 v 满足 $\mu e \leq v \leq \lambda e$, 其中 $\mu > 0$ 和 $\lambda > 0$;

(ii) 1 不是 KF'_θ 的一个特征值, 且孤立零点指数 $\mathrm{ind}(I - KF'_\theta, \theta) = 1$;

(iii) 存在 $u_0 \in (-P)\backslash\{\theta\}$ 且 $v_0 \in P\backslash\{\theta\}$ 使得 $u_0 \leq Au_0$ 且 $Av_0 \leq v_0$. 存在 $\beta > 0$ 使得 $u_0 \leq -\beta e$ 及 $\beta e \leq v_0$;

(iv) 存在 $h \geq \nu e$ 与 $\nu > 0$, 使得对于所有的 $x \in P$ 及 $Ax = x$, 有 $\|x\|h \leq x$; 对于所有的 $x \in (-P)$ 及 $Ax = x$, 有 $x \leq -\|x\|h$.

则算子 A 至少有一个变号不动点, 一个正不动点与一个负不动点.

容易看到定理 4.1.4 和定理 4.1.5 对锥 P 均解除了体锥的限制, 若算子 A 为复合算子时, 也不要求算子 F 严格增. 另外, 从应用的角度看, 文 [78] 也建立非线性 Hammerstein 型积分方程的变号解的存在性定理, 通过极限形式 $\lim\limits_{u\to\infty} f(x,u)/u$ 与 $\|e\|$ 的联系, 构造了定理 4.1.5 中的条件 (iii), 即上下解条件. 事实上, 在 [35] 中也是以此法构造上下解的. 因此, 对 $\|e\|$ 的精确计算, 可直接确定出定理 4.1.2 中的条件 (A_3), 且确定出的条件的适用范围是较宽的.

注意到在 2004 年, 文 [79] 研究了以下 m- 点边值问题的多重变号解:

$$\begin{cases} y''(t) + f(y(t)) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1, \\ y(0) = 0, \qquad y(1) = \sum\limits_{i=1}^{m-2} \alpha_i y(\eta_i), \end{cases} \tag{4.1.2}$$

其中 $0 < \alpha_i$, $i = 1, 2, \cdots, m-2$, $0 < \eta_1 < \eta_2 < \cdots < \eta_{m-2} < 1$.

列一些假设如下:

$(\widehat{A}_1)$ 设方程 $\sin\sqrt{x} = \sum\limits_{i=1}^{m-2} \alpha_i \sin\eta_i\sqrt{x}$ 的正解序列为

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \lambda_{n+1} < \cdots;$$

$(\widehat{A}_2)$ $0 < \sum\limits_{i=1}^{m-2} \alpha_i < 1$, $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 为连续函数, $f(0) = 0$, 对于所有的 $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, 有 $xf(x) > 0$;

$(\widehat{A}_3)$ 设 $\beta_0 = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$, $\beta_\infty = \lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{f(x)}{x}$, 则存在正整数 n_0 与 n_1, 使得

$$\lambda_{2n_0} < \beta_0 < \lambda_{2n_0+1}, \qquad \lambda_{2n_1} < \beta_\infty < \lambda_{2n_1+1};$$

$(\widehat{A}_4)$ 存在 $C_0 > 1$, 使得对于所有的 $x \in \mathbb{R}$ 且满足 $|x| \le C_0$, 有

$$|f(x)| < \frac{2(1 - \sum\limits_{i=1}^{m-2} \alpha_i \eta_i)}{5 - \sum\limits_{i=1}^{m-2} \alpha_i \eta_i} C_0.$$

文 [79] 的主要结果如下:

定理 4.1.6([79]) 设条件 $(\widehat{A}_1)$-$(\widehat{A}_4)$ 成立, 则边值问题 (4.1.2) 至少有两个变号解, 进一步, (4.1.2) 也有两个正解与两个负解.

在文 [79] 之后, 众多学者采用类似的方法研究各类微分方程与差分方程的变号解, 如文 [80] 研究了边值问题 (4.1.1) 的多重变号解, 与定理 4.1.6 相比, 作者采用了不同于条件 $(\widehat{A}_4)$ 的下列假设:

$(\widetilde{A}_4')$ 存在 $T > 0$, 使得

$$|f(x)| < 2(1 - \alpha\eta)|x|, \quad |x| \le T.$$

文 [81] 考察了一类四阶微分方程边值问题的多重变号解, 进一步, 文 [82] 建立了一类四阶 m- 点边值问题的多重变号解的存在性定理. 文 [83] 则通过计算线性问题的特征值与代数重数, 研究了一类积分边值问题的多重变号解. 文 [84] 讨论了一类离散边值问题的变号解, 并给出了具体的例子.

2009 年, 文 [85] 研究了渐近线性三点边值问题 (4.1.1) 的变号解, f 满足以下假设条件:

$(\widetilde{A}_1)$ $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 为连续和严格增函数, $f(0) = 0$;

$(\widetilde{A}_2)$ $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \beta_\infty$, 其中 $\lambda_1 < \beta_\infty < \frac{8(1-\alpha\eta)^2}{(1-\alpha\eta^2)^2}$, $\beta_\infty \ne \lambda_n$, $n = 2, 3, \cdots$, 且

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \lambda_{n+1} < \cdots$$

是以下方程的正解序列 $\sin\sqrt{x} = \alpha \sin \eta\sqrt{x}$;

$(\widetilde{A}_3)$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \beta_0 > \lambda_1$.

他们获得了以下结果:

定理 4.1.7([85]) 令 α 和 η 为给定的实数, 且 $0 < \alpha < 1$, $0 < \eta < 1$. 假设条件 $(\widetilde{A}_1)$-$(\widetilde{A}_3)$ 成立. 那么问题 (4.1.1) 至少有一个变号解. 进一步, 问题 (4.1.1) 至少有两个正解和两个负解.

向量格, 或称为 Riesz 空间, 即以相容的向量与格的结构按确定方式构成的空间. 荷兰数学家 W.A.J. Luxemburg 和 A.C. Zaanen 在其专著 [4] 中进行了系

统的论述. 这一理论出现后, 与线性泛函分析结合的结果较多, 参见 [4], 而在相当长的时间里, 未见到向量格与拓扑度以及临界点理论相结合的文献. 直到 2008 年, 孙经先教授在其专著 [1] 中首次将向量格理论应用于非锥映射的非线性算子的不动点指数的计算中, 激发了一系列后继研究 [86-89].

向量格理论为研究非线性算子方程的多重解与变号解提供了有力的工具和适当的框架. 文 [1] 给出了格结构下的拟可加算子的定义, 然后, 分别建立了格结构下次线性算子和超线性算子的拓扑度计算的一般性方法, 进而获得了格结构下的拟可加算子存在非零不动点、正不动点、负不动点以及变号不动点的一系列结果. 拟可加算子的特点在于仅在正锥和负锥上对算子加一些控制条件, 给出的条件更内在、也更自然. 文 [86] 建立了格结构下新的不动点指数和拓扑度的计算方法, 进而, 利用此方法, 获得了单边渐近线性算子方程的变号解与多重解. 新近, 文 [87] 应用 [86] 的抽象结果, 讨论了一类四阶多点边值问题的变号解. 引入向量格理论之后, 不仅可解除一些不必要的约束条件, 而且在应用到微分方程时, 仅要求相应的核函数非负和对应的线性积分算子的谱半径不为零这两条性质. 同时, 上述结论可直接应用于偏微分方程.

本章的主要目的是将定理 4.1.6 与定理 4.1.7 的条件分别抽象出来, 从而建立非线性算子方程变号解的存在性的一般性定理. 然后, 研究了格结构下的单边渐近线性算子方程的变号解. 最后, 将得到的抽象结果应用于非线性积分方程和椭圆型偏微分方程, 获得其变号解的存在性. 在证明中, 我们吸收了文 [78] 的思想.

§4.2 渐近线性算子方程的单个变号解的存在性

我们的主要结果为:

定理 4.2.1 令 E 为实 Banach 空间, P 为 E 中的正规锥及完全锥, $A: E \longrightarrow E$ 是全连续的增算子, $A\theta = \theta$, 且 A 在 E 上 e- 连续. 设以下条件成立:

(i) 存在 $u_1 \in (-P)\backslash\{\theta\}$ 和 $v_1 \in P\backslash\{\theta\}$ 使得 $u_1 \leq Au_1$ 和 $Av_1 \leq v_1$;

(ii) 存在 $u_2 \in (-P)\backslash\{\theta\}$, $v_2 \in P\backslash\{\theta\}$, 与 $\delta > 0$ 使得 $u_1 < u_2 < \theta < v_2 < v_1$, $Au_2 \leq u_2 - \delta e$, $v_2 + \delta e \leq Av_2$;

(iii) A 在 ∞ 的 Fréchet 导算子 A'_∞ 存在, A'_∞ 是增算子, $r(A'_\infty) > 1$, 且 1 不是 A'_∞ 的一个特征值.

则 A 至少有五个不动点, 其中两个是正不动点, 另两个是负不动点, 第五个为变号不动点.

定理 4.2.2 令 E 为实 Banach 空间, P 为 E 中的正规锥及完全锥, $A=KF$, 其中 $F: E \longrightarrow E$ 为连续且有界的增算子, $K: E \longrightarrow E$ 为正线性全连续算子, 且在 E 上 e- 连续. 假定以下条件成立:

(i) 存在 $u_1 \in (-P)\backslash\{\theta\}$ 和 $v_1 \in P\backslash\{\theta\}$ 使得 $u_1 \leq Au_1$ 和 $Av_1 \leq v_1$, 并且存在 $\alpha > 0$ 使得 $u_1 \leq -\alpha e$ 及 $\alpha e \leq v_1$;

(ii) $F(\theta)=\theta$, F 在 θ 点处 Fréchet 可微, 并且 KF'_θ 有一个特征值 $\lambda_0 < 1$, 相应的特征函数 ψ 满足 $\mu_1 e \leq \psi \leq \mu_2 e$, 其中 $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$.

进一步, 设定理 4.2.1 中的条件 (iii) 成立, 则算子 A 至少有五个不动点, 其中一个为变号不动点, 两个为正不动点, 另两个为负不动点.

为证明定理 4.2.1 和定理 4.2.2, 需要建立以下几个引理, 本节均假定 $B_R = \{x \in E|\ \|x\| < R\}$.

引理 4.2.1([85, 90]) 令 E 为实 Banach 空间, P 为 E 中的正规锥及完全锥, $A: E \longrightarrow E$ 是全连续的增算子. 设以下条件成立:

(i) 存在 u, $v \in E$ 使得 $u \leq Au$, $Av \leq v$;

(ii) A 在 ∞ 的 Fréchet 导算子 A'_∞ 存在, A'_∞ 是增算子, $r(A'_\infty) > 1$, 且 1 不是 A'_∞ 的一个特征值.

则存在 $\overline{R} > 0$, 使得当 $R \geq \overline{R}$ 时, 有

$$i(A, \widetilde{\Omega}_1, S_1) = 0, \quad i(A, \widetilde{\Omega}_2, S_2) = 0,$$

其中

$$S_1 = \{x \in E | x \geq u\}, \quad S_2 = \{x \in E | x \leq v\},$$

$$\widetilde{\Omega}_1 = \{x \in S_1 |\ \|x\| < R\}, \quad \widetilde{\Omega}_2 = \{x \in S_2 |\ \|x\| < R\}.$$

引理 4.2.2([1, 91]) 设 A 为 E 上的全连续的渐近线性算子. 若 1 不是 A'_∞ 的特征值, 则存在 $R_0 > 0$, 使得当 $R \geq R_0$ 时, 有

$$\deg(I - A, B_R, \theta) = (-1)^\gamma,$$

其中 γ 表示 A'_∞ 的实的小于 1 的全部特征值的代数重数之和.

引理 4.2.3([78]) 令 $A = KF$, 其中 $K: E \longrightarrow E$ 是一个有界线性算子且在 θ 处 e- 连续, $F\theta = \theta$, $F: E \longrightarrow E$ 在 θ 处 Fréchet 可微. 若 $A'_\theta = KF'_\theta$ 有一个特征值 $\lambda_0 < 1$, 其对应的特征函数 v 满足 $\mu e \leq v$, 其中 $\mu > 0$. 则存在

$\gamma > 0$ 使得对于所有 $t \in (0, \gamma)$, 有 $tv + \delta e \le A(tv)$ 且 $A(-tv) \le -tv - \delta e$, 其中 $\delta = \delta(t) = t(\frac{1}{\lambda_0} - 1)\frac{\mu}{2} > 0$.

定理 4.2.1 的证明 由条件 (i) 和 (ii), 可得

$$u_1 < u_2 < \theta < v_2 < v_1,$$

$$u_1 \le Au_1, \quad Au_2 < u_2, \quad v_2 < Av_2, \quad Av_1 \le v_1. \tag{4.2.1}$$

令

$$W_1 = \{x \in E | x \le u_2\}, \quad W_2 = \{x \in E | x \ge v_2\},$$

$$W_3 = \{x \in E | x \ge u_1\}, \quad W_4 = \{x \in E | x \le v_1\}.$$

由引理 4.2.1 可得, 存在 $R_1 > 0$, 使得当 $R \ge R_1$ 时, 有

$$i(A, \overline{\Omega}_i, W_i) = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, \tag{4.2.2}$$

其中 $\overline{\Omega}_i = \{x \in W_i | \ \|x\| < R\}$, $i = 1, 2, 3, 4$.

根据引理 4.2.2, 存在 $R_2 > 0$, 使得当 $R \ge R_2$ 时, 有

$$\deg(I - A, B_R, \theta) = (-1)^\gamma, \tag{4.2.3}$$

其中 γ 是 A'_∞ 的实的小于 1 的全部特征值的代数重数之和.

由 (1.3.1) 以及 (4.2.3), 有

$$i(A, B_R, E) = \deg(I - Ar, B_{\overline{R}} \cap r^{-1}(B_R), \theta) = \deg(I - A, B_R, \theta) = (-1)^\gamma = \pm 1, \tag{4.2.4}$$

其中 $r : E \longrightarrow E$ 是恒等算子, $B_R \subset B_{\overline{R}} = \{x \in E | \ \|x\| < \overline{R}\}$.

选取 R_3 使得

$$R_3 > \left\{ \sup_{x \in [u_1, v_1]} \|x\|, R_1, R_2 \right\}. \tag{4.2.5}$$

令

$$\Omega_i = \{x \in W_i | \ \|x\| < R_3\}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

由 (4.2.2), (4.2.5) 及引理 4.2.1, 我们有

$$i(A, \Omega_i, W_i) = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4. \tag{4.2.6}$$

令

$$\Sigma_1 = \{x \in [u_1, u_2] : \|x\| < R_3,\ \text{并且存在}\ \mu > 0\ \text{使得}\ Ax \leq u_2 - \mu e\},$$

$$\Sigma_2 = \{x \in [v_2, v_1] : \|x\| < R_3,\ \text{并且存在}\ \mu > 0\ \text{使得}\ v_2 + \mu e \leq Ax\}.$$

既然 $u_2 \in \Sigma_1$, $v_2 \in \Sigma_2$, 可得 $\Sigma_1 \neq \emptyset$, $\Sigma_2 \neq \emptyset$. 根据算子 A 在 E 上的 e- 连续性, 可知 Σ_1 是 $[u_1, u_2]$ 的非空开子集, Σ_2 是 $[v_2, v_1]$ 中的非空开子集. 与 [78] 中的引理 2.2 的证明一样, 由不动点指数的同伦不变性与正规性, 可得

$$i(A, \Sigma_1, [u_1, u_2]) = i(u_2, \Sigma_1, [u_1, u_2]) = 1. \tag{4.2.7}$$

类似地, 有

$$i(A, \Sigma_2, [v_2, v_1]) = i(v_2, \Sigma_2, [v_2, v_1]) = 1. \tag{4.2.8}$$

(4.2.7) 和 (4.2.8) 表明算子 A 至少有一个负不动点 $x_1 \in \Sigma_1$, 和一个正不动点 $x_2 \in \Sigma_2$.

根据不动点指数的保持性, 我们有

$$i(A, \Sigma_1, W_1) = i(A, \Sigma_1 \cap [u_1, u_2], [u_1, u_2]) = i(A, \Sigma_1, [u_1, u_2]) = 1. \tag{4.2.9}$$

类似地, 有

$$i(A, \Sigma_2, W_2) = i(A, \Sigma_2 \cap [v_2, v_1], [v_2, v_1]) = i(A, \Sigma_2, [v_2, v_1]) = 1. \tag{4.2.10}$$

由 (4.2.6), (4.2.9) 以及不动点指数的可加性, 可得

$$i(A, \Omega_1 \backslash \overline{\Sigma}_1, W_1) = i(A, \Omega_1, W_1) - i(A, \Sigma_1, W_1) = 0 - 1 = -1.$$

类似地, 也有

$$i(A, \Omega_2 \backslash \overline{\Sigma}_2, W_2) = i(A, \Omega_2, W_2) - i(A, \Sigma_2, W_2) = 0 - 1 = -1.$$

因此, A 至少有一个负不动点 $x_3 \in \Omega_1 \backslash \overline{\Sigma}_1$ 和一个正不动点 $x_4 \in \Omega_2 \backslash \overline{\Sigma}_2$.

进一步, 根据 (4.2.6) 与不动点指数的保持性, 可得

$$i(A, \Omega_i, E) = i(A, \Omega_i \cap W_i, W_i) = i(A, \Omega_i, W_i) = 0, \quad i = 3, 4. \tag{4.2.11}$$

由 (4.2.4), (4.2.11) 以及不动点指数的可加性, 我们有

$$i(A, B_{R_3} \backslash \overline{\Omega_3 \cup \Omega_4}, E) = i(A, B_{R_3}, E) - i(A, \Omega_3, E) - i(A, \Omega_4, E) = \pm 1, \tag{4.2.12}$$

(4.2.12) 意味着算子 A 至少有一个不动点 $x_5 \in (B_{R_3}\backslash\overline{\Omega_3 \cup \Omega_4}) \subset (E\backslash(P\cup(-P)))$, 并且 x_5 是一个变号不动点.

定理 4.2.2 的证明 我们仅需验证定理 4.2.1 中的条件 (ii). 根据复合算子求导的链式法则 [92, 命题 4.10], 有 $A'_\theta = KF'_\theta$.

由条件 (i) 和引理 4.2.3 可得, 存在 $\beta > 0$, 对于所有的 $t \in (0,\beta)$, 都有 $t\psi + \delta e \leq A(t\psi)$, $A(-t\psi) \leq -t\psi - \delta e$, 其中 $\delta = \frac{t(\lambda_0^{-1}-1)\mu_1}{2} > 0$.

令 $\overline{\beta} = \min\{\beta, \frac{\alpha}{2\mu_2}\}$, 对于 $t \in (0,\overline{\beta})$, 有

$$t\psi \leq \frac{\alpha}{2\mu_2}\mu_2 e = \frac{\alpha}{2}e \leq \frac{v_1}{2} < v_1,$$

及

$$u_1 < \frac{u_1}{2} \leq -\frac{\alpha}{2}e = -\frac{\alpha}{2\mu_2}\mu_2 e \leq -t\psi.$$

取 $u_2 = -t\psi$, $v_2 = t\psi$, $t \in (0,\overline{\beta})$, 则定理 4.2.1 中的条件 (ii) 成立.

§4.3 渐近线性算子方程的多个变号解的存在性

为了获得我们的主要结果, 需要以下引理:

引理 4.3.1([1]) 设 P 是 Banach 空间 E 中的锥, Ω 是 E 中的有界开集, $\theta \in \Omega$, $A: P\cap\overline{\Omega} \longrightarrow P$ 是凝聚算子, 如果对任给的 $x \in P\cap\partial\Omega$, 都有 $Ax \ngeq x$, 则 $i(A, P\cap\Omega, P) = 1$.

引理 4.3.2([93]) 设 E 是 Banach 空间, P 为 E 中的正锥及完全锥, $A: P \longrightarrow P$ 为全连续算子.

(a) 设 $A(\theta) = \theta$, A 在零点 Fréchet 可微. 若 $A'_\theta x \neq x$, $\forall\, x \in P\backslash\{\theta\}$, 且存在 $\lambda_0 < 1$, $x_0 \in P\backslash\{\theta\}$ 使得 $\lambda_0 A'_\theta x_0 = x_0$, 则存在 $\rho_0 > 0$ 使得当 $\rho \in (0,\rho_0]$ 时, 有 $i(A, B_\rho\cap P, P) = 0$, 其中 $B_\rho = \{x \in E|\ \|x\| < \rho\}$.

(b) 设 A 为渐近线性算子. 若 $A'_\infty x \neq x$, $\forall\, x \in P\backslash\{\theta\}$, 且存在 $\tilde{\lambda}_0 < 1$, $\tilde{x}_0 \in P\backslash\{\theta\}$ 使得 $\tilde{\lambda}_0 A'_\infty \tilde{x}_0 = \tilde{x}_0$, 则存在 $\rho_\infty > 0$ 使得当 $\rho \geq \rho_\infty$ 时, 有 $i(A, B_\rho \cap P, P) = 0$.

引理 4.3.3([1]) 设 D 为 E 中开集, $A: D \longrightarrow E$ 全连续, $x_0 \in D$, $Ax_0 = x_0$. 又设 A 在 x_0 可微, 并且 1 不是 A'_{x_0} 的特征值, 则 x_0 必是 A 的孤立不动点, 并且指数

$$\text{ind}(I - A, x_0) = \text{ind}(I - A'_{x_0}, \theta) = (-1)^\eta,$$

其中 η 表示 A'_{x_0} 的实的小于 1 的全部特征值的代数重数之和.

引理 4.3.4([81]) 设 X 为 Banach 空间 E 中的体锥, Ω 为 X 中的有界相对开集, $A: X \longrightarrow X$ 全连续. 若 A 在 Ω 中的任一不动点是 X 中的一个内点, 则存在 E 中的开子集 O 使得

$$\deg(I - A, O, \theta) = i(A, \Omega, X).$$

引理 4.3.5([1]) 设 Ω 是 E 中的有界开集, $\theta \in \Omega$, $A: \overline{\Omega} \longrightarrow E$ 是凝聚算子. 若

$$Ax \neq \mu x, \quad \forall\, x \in \partial\Omega, \ \mu \geq 1,$$

则 $\deg(I - A, \Omega, \theta) = 1$.

我们的结果如下:

定理 4.3.1 令 E 为实 Banach 空间, P 为 E 中的正规体锥, $A: E \longrightarrow E$ 为全连续算子, $A(P\backslash\{\theta\}) \subset P^{\circ}$, $A(-P\backslash\{\theta\}) \subset -P^{\circ}$, $A\theta = \theta$. 设以下条件成立:

(H_1) A'_{∞} 存在且为增算子, $r(A'_{\infty}) > 1$, 1 不是 A'_{∞} 的特征值, 并且 A'_{∞} 的小于 1 的全部特征值的代数重数之和为偶数;

(H_2) A'_{θ} 存在且为增算子, $r(A'_{\theta}) > 1$, 1 不是 A'_{θ} 的特征值, 并且 A'_{θ} 的小于 1 的全部特征值的代数重数之和为偶数;

(H_3) $\displaystyle\lim_{\|x\| \to 0} \sup \frac{\|Ax\|}{\|x\|} < 1$.

则 A 至少有两个变号不动点, 两个正不动点与两个负不动点.

证明 由条件 (H_3), 可得存在 $\tilde{r} > 0$, 使得对于 $0 < \|x\| < \tilde{r}$, 有 $\|Ax\| < \|x\|$. 根据引理 4.3.1, 存在 $r < \tilde{r}$, 使得

$$i(A, P \cap T_r, P) = 1, \tag{4.3.1}$$

$$i(A, -P \cap T_r, -P) = 1, \tag{4.3.2}$$

其中 $T_r = \{x \in E \mid \|x\| < r\}$. 既然 $A(P\backslash\{\theta\}) \subset P^{\circ}$, $A(-P\backslash\{\theta\}) \subset -P^{\circ}$, $A\theta = \theta$, 结合条件 (H_2) 可知, $A'_{\theta}(P) \subset P$ 且 $r(A'_{\theta}) > 1 > 0$. 根据引理 1.3.4 可得, 存在 $\overline{\varphi} \in P\backslash\{\theta\}$ 使得 $A'_{\theta}\overline{\varphi} = r(A'_{\theta})\overline{\varphi} > \overline{\varphi}$. 既然 1 不是 A'_{θ} 的特征值, 从而 $A'_{\theta}x \neq x$, $\forall\, x \in P\backslash\{\theta\}$, 根据引理 4.3.2 可得, 存在 $\rho_0 \in (0, r)$ 使得对于所有 $\rho \in (0, \rho_0]$, 有

$$i(A, P \cap T_{\rho}, P) = 0. \tag{4.3.3}$$

类似地, 有

$$i(A, -P \cap T_\rho, -P) = 0. \tag{4.3.4}$$

同理可知, 存在 $\rho_\infty > r$ 使得对于所有 $\rho \geq \rho_\infty$, 有

$$i(A, P \cap T_\rho, P) = 0. \tag{4.3.5}$$

$$i(A, -P \cap T_\rho, -P) = 0. \tag{4.3.6}$$

从引理 4.3.3 和引理 4.2.2, 并结合条件 (H_1) 及 (H_2) 可得, 存在 $\rho_1 \in (0, \rho_0)$ 与 $\rho_2 > \rho_\infty$, 有

$$\deg(I - A, T_{\rho_1}, \theta) = 1, \tag{4.3.7}$$

$$\deg(I - A, T_{\rho_2}, \theta) = 1. \tag{4.3.8}$$

由 (4.3.3)-(4.3.6) 四式可知

$$i(A, P \cap T_{\rho_1}, P) = 0, \tag{4.3.9}$$

$$i(A, -P \cap T_{\rho_1}, -P) = 0, \tag{4.3.10}$$

$$i(A, P \cap T_{\rho_2}, P) = 0, \tag{4.3.11}$$

$$i(A, -P \cap T_{\rho_2}, -P) = 0. \tag{4.3.12}$$

由 (4.3.1), (4.3.9), (4.3.11) 及不动点指数的可加性, 可得

$$i(A, P \cap (T_r \backslash \overline{T}_{\rho_1}), P) = i(A, P \cap T_r, P) - i(A, P \cap T_{\rho_1}, P) = 1 - 0 = 1, \tag{4.3.13}$$

$$i(A, P \cap (T_{\rho_2} \backslash \overline{T}_r), P) = i(A, P \cap T_{\rho_2}, P) - i(A, P \cap T_r, P) = 0 - 1 = -1. \tag{4.3.14}$$

故 A 在 $P \cap (T_r \backslash \overline{T}_{\rho_1})$ 与 $P \cap (T_{\rho_2} \backslash \overline{T}_r)$ 中分别有一个不动点 u_1, u_2, 均为正不动点.

再由 (4.3.2), (4.3.10), (4.3.12) 及不动点指数的可加性, 可得

$$i(A, -P \cap (T_r \backslash \overline{T}_{\rho_1}), -P) = 1, \tag{4.3.15}$$

$$i(A, -P \cap (T_{\rho_2} \backslash \overline{T}_r), -P) = -1. \tag{4.3.16}$$

则 A 分别在 $-P \cap (T_r \backslash \overline{T}_{\rho_1})$ 与 $-P \cap (T_{\rho_2} \backslash \overline{T}_r)$ 中各有一个不动点 u_3, u_4, 且均为负不动点.

既然 $A(P\backslash\{\theta\}) \subset P^\circ$, $A(-P\backslash\{\theta\}) \subset -P^\circ$. 令

$$\Sigma_1 = \{u \in P \cap (T_r \backslash \overline{T}_{\rho_1}) : Au = u\},$$

$$\Sigma_2 = \{u \in P \cap (T_{\rho_2} \backslash \overline{T}_r) : Au = u\},$$

$$\Sigma_3 = \{u \in -P \cap (T_r \backslash \overline{T}_{\rho_1}) : Au = u\},$$

$$\Sigma_4 = \{u \in -P \cap (T_{\rho_2} \backslash \overline{T}_r) : Au = u\}.$$

根据引理 4.3.4 及 (4.3.13)-(4.3.16) 可知, 存在 E 中的开集 Ω_i (i=1, 2, 3, 4) 使得

$$\Sigma_1 \subset \Omega_1 \subset P \cap (T_r \backslash \overline{T}_{\rho_1}),$$

$$\Sigma_2 \subset \Omega_2 \subset P \cap (T_{\rho_2} \backslash \overline{T}_r),$$

$$\Sigma_3 \subset \Omega_3 \subset -P \cap (T_r \backslash \overline{T}_{\rho_1}),$$

$$\Sigma_4 \subset \Omega_4 \subset -P \cap (T_{\rho_2} \backslash \overline{T}_r).$$

且

$$\deg(I - A, \Omega_1, \theta) = 1, \tag{4.3.17}$$

$$\deg(I - A, \Omega_2, \theta) = -1, \tag{4.3.18}$$

$$\deg(I - A, \Omega_3, \theta) = 1, \tag{4.3.19}$$

$$\deg(I - A, \Omega_4, \theta) = -1. \tag{4.3.20}$$

从引理 4.3.5 可知,

$$\deg(I - A, T_r, \theta) = 1. \tag{4.3.21}$$

由 (4.3.21), (4.3.17), (4.3.19), (4.3.7) 及 Leray-Schauder 度的可加性, 可得

$$\deg(I - A, T_r \backslash (\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_3 \cup \overline{T}_{\rho_1}), \theta) = 1 - 1 - 1 - 1 = -2,$$

故 A 在 $T_r \backslash (\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_3 \cup \overline{T}_{\rho_1})$ 中有一个不动点 u_5, 为变号不动点.

由 (4.3.8), (4.3.18), (4.3.20), (4.3.21) 及 Leray-Schauder 度的可加性, 可得

$$\deg(I - A, T_{\rho_2} \backslash (\overline{\Omega}_2 \cup \overline{\Omega}_4 \cup \overline{T}_r), \theta) = 1 + 1 + 1 - 1 = 2,$$

故 A 在 $T_{\rho_2} \backslash (\overline{\Omega}_2 \cup \overline{\Omega}_4 \cup \overline{T}_r)$ 中有一个不动点 u_6, 也为变号不动点. 证毕.

§4.4 格结构下的非线性算子方程的变号解

首先, 我们叙述单边渐近线性算子的概念, 该概念在文 [86] 中提出. 对于 $w \in E$, 令 $P_w = P + w = \{x \in E | x \geq w\}$ 且 $P^w = w - P = \{x \in E | x \leq w\}$.

定义 4.4.1([86]) 令 P 为 Banach 空间 E 中的锥, $A : E \longrightarrow E$ 为非线性算子. 若存在一个有界线性算子 L 使得

$$\lim_{x \in P_w, \|x\| \to \infty} \frac{\|Ax - Lx\|}{\|x\|} = 0.$$

则称 A 为沿着 P_w 的单边渐近线性算子, L 称为 A 沿着 P_w 的导算子, 记 $L = A'_{P_w}$.

相似地, 可定义沿着 P^w 的单边渐近线性算子.

定义 4.4.2([1]) 设 $A : E \longrightarrow E$ 是一个算子 (一般是非线性的). 若存在 $v^* \in E$, 使得

$$Ax = Ax_+ + Ax_- + v^*, \qquad \forall\, x \in E,$$

则称 A 是格结构下的拟可加算子.

为了证明我们的主要结果, 需要以下引理:

引理 4.4.1([86]) 令 P 是正规的完全锥, 设存在 $w \in E$ 使得 $A : P_w \longrightarrow P_w$ 连续, A'_{P_w} 存在, $r(A'_{P_w}) > 1$, 并且 1 不是 A'_{P_w} 的相应于正特征函数的一个特征值. 则存在 $R' > 0$ 使得当 $R > R'$ 时, 有

$$i(A, B_R \cap P_w, P_w) = 0.$$

引理 4.4.2([86]) 令 P 是正规的完全锥, 设存在 $v \in E$ 使得 $A : P^v \longrightarrow P^v$ 连续, A'_{P^v} 存在, $r(A'_{P^v}) > 1$, 并且 1 不是 A'_{P^v} 的相应于正特征函数的一个特征值. 则存在 $R' > 0$ 使得当 $R > R'$ 时, 有

$$i(A, B_R \cap P^v, P^v) = 0.$$

我们的结果为:

定理 4.4.1 令 P 是 E 中的正规的完全锥, $A : E \longrightarrow E$ 是全连续算子, 且是格上的拟可加算子, $A\theta = \theta$. 设以下条件成立:

(i) A 在 P 和 $-P$ 上是 e- 连续和增的;

(ii) A'_P 和 A'_{-P} 存在, $r(A'_P) > 1$, $r(A'_{(-P)}) > 1$, 1 不是 A'_P 及 $A'_{(-P)}$ 的相应于正特征函数的一个特征值.

进一步, 定理 4.2.1 的条件 (i), (ii), (iii) 均满足. 则算子 A 至少有一个变号不动点, 同时有两个正不动点及两个负不动点.

定理 4.4.1 的证明 既然 $A\theta=\theta$ 以及 $Ax=Ax_++Ax_-+v^*$, 可得

$$Ax=Ax_-+Ax_+,\quad \forall\, x\in E. \tag{4.4.1}$$

由 A 在 P 和 $-P$ 上为增算子, 有 $Ax_-\le A\theta\le Ax_+$, i.e., $Ax_-\le\theta\le Ax_+$, 结合 (4.4.1), 可得

$$Ax_-\le Ax\le Ax_+,\quad \forall\, x\in E. \tag{4.4.2}$$

对于任意给定的 $x\in W_3,\ W_4$, 注意到 $u_1<\theta<v_1$, 我们有 $x_+\le v_1,\ x_-\ge u_1$, 根据 (4.2.1) 和 (4.4.2), 可得

$$u_1\le Au_1\le Ax_-\le Ax,\quad Ax\le Ax_+\le Av_1\le v_1, \tag{4.4.3}$$

(4.4.3) 意味着 $A(W_3)\subset W_3,\ A(W_4)\subset W_4$. 与 [86] 中的定理 3.1 的证明类似, 可知 $A'_{P_{u_1}}$ 与 $A'_{P^{v_1}}$ 存在, 并且 $A'_{P_{u_1}}=A'_P,\ A'_{P^{v_1}}=A'_{(-P)}$. 引理 4.4.1 和引理 4.4.2 保证了存在 $R_1>0$, 使得当 $R>R_1$ 时, 有

$$i(A,B_R\cap P_{u_1},P_{u_1})=0,\quad i(A,B_R\cap P^{v_1},P^{v_1})=0.$$

剩下的证明同定理 4.2.1 一样, 我们略去.

§4.5 应用

本节的目的是将我们获得的抽象结果应用到积分方程和微分方程中. 首先, 我们考察以下 Hammerstein 型积分方程

$$\varphi(x)=\int_G k(x,y)f(y,\varphi(y))dy,\quad x\in G, \tag{4.5.1}$$

其中 G 是 $\mathbb{R}^N$ 中的有界闭区域, $k:G\times G\longrightarrow\mathbb{R}^1$ 是非负连续函数, 且在 $G\times G$ 上 $k\not\equiv 0$, $f:G\times\mathbb{R}^1\longrightarrow\mathbb{R}^1$ 是连续函数.

令 $E=C(G)$ 表示 G 上全体连续函数构成的空间, 则 E 是实 Banach 空间, 对于所有的 $\varphi\in E$, 其范数为 $\|\varphi\|=\max_{x\in G}|\varphi(x)|$. 设 $P=\{\varphi\in E:\varphi(x)\ge 0,\ x\in G\}$, 则 P 为 E 中的正规的完全锥. 令 $e(x)=\int_G k(x,y)dy,\ x\in G$, 则 $e>0$.

分别定义算子 $F,\ K,\ A: E \longrightarrow E$ 为

$$(F\varphi)(x) = f(x, \varphi(x)),\quad x \in G,\quad \forall\, \varphi \in E,$$

$$(K\varphi)(x) = \int_G k(x,y)\varphi(y)dy,\quad x \in G,\quad \forall\, \varphi \in E,$$

且 $A = KF$. 易见 $F: E \longrightarrow E$ 是一个连续有界算子. 既然 $k: G \times G \longrightarrow \mathbb{R}^1$ 非负连续, 可知 $K: E \longrightarrow E$ 是一个线性全连续算子且 $K(P) \subset P$, 故 A 在 E 上也是全连续的. 根据 Riesz-Schauder 定理, 可假定 K 的所有正特征值序列为 $\{\lambda_n\}$, 满足

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots .$$

方便起见, 列一些条件如下:

(C_1) 在 G 上 $f(\cdot, 0) = 0$, 对于每一个 $x \in G$, $f(x, \varphi)$ 关于 φ 非减;

(C_2) 存在 h 满足 $\mu e \leq h$, 其中 μ 是一个正数, 使得

$$k(x,y) \geq h(x)k(z,y),\qquad x,\ y,\ z \in G;$$

(C_3) $\lim\limits_{\varphi \to 0} \frac{f(x,\varphi)}{\varphi} = f_0$ 对于 $x \in G$ 一致成立, 且 $f_0 > \lambda_1$;

(C_4) $\lim\limits_{\varphi \to \infty} \frac{f(x,\varphi)}{\varphi} = f_\infty$ 对于 $x \in G$ 一致成立, 且 $f_\infty > \lambda_1,\ f_\infty \neq \lambda_k,\ k \neq 2,\ 3,\ \cdots,\ f_\infty < \frac{1}{\|e\|}$.

为了证明我们的主要结果, 需要以下引理:

引理 4.5.1 ([78]) 算子 $K,\ A: E \longrightarrow E$ 在 E 上 e- 连续.

引理 4.5.2 ([78]) 假定在 G 上 $f(\cdot, 0) = 0$, 且 $\lim\limits_{\varphi \to 0} \frac{f(x,\varphi)}{\varphi} = f_0$ 对于 $x \in G$ 一致成立, 则算子 A 在 θ 点处 Fréchet 可微, 且 $A'_\theta = f_0 K$.

引理 4.5.3 设 $\lim\limits_{\varphi \to \infty} \frac{f(x,\varphi)}{\varphi} = f_\infty$ 对于 $x \in G$ 一致成立, 则算子 A 是渐近线性的, 且 $A'_\infty = f_\infty K$.

证明 由 $\lim\limits_{\varphi \to \infty} \frac{f(x,\varphi)}{\varphi} = f_\infty$ 对于 $x \in G$ 一致成立可得, 对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 存在 $R > 0$ 使得

$$\left| \frac{f(x,\varphi)}{\varphi} - f_\infty \right| < \epsilon,\quad x \in G,\quad |\varphi| > R. \tag{4.5.2}$$

取 $M = \max_{x \in G, -R \leq \varphi \leq R} |f(x,\varphi)|$, 结合 (4.5.2), 有

$$|f(x,\varphi) - f_\infty \varphi| \leq M + f_\infty R + \epsilon \|\varphi\|,\quad \forall\, \varphi \in E,\quad \|\varphi\| \geq R,$$

从而

$$\|A\varphi - f_\infty K\varphi\| = \|K(F\varphi) - f_\infty K\varphi\| \leq \|K\|(M + f_\infty R + \epsilon\|\varphi\|).$$

因此

$$\lim_{\|\varphi\|\to\infty} \frac{\|A\varphi - f_\infty K\varphi\|}{\|\varphi\|} = 0.$$

这蕴含着算子 A 是渐近线性的, 且 $A'_\infty = f_\infty K$.

我们的结果为以下定理:

定理 4.5.1 假设条件 (C_1)-(C_4) 成立, 那么, 积分方程 (4.5.1) 至少存在五个非平凡解, 其中两个为正解, 两个为负解, 第五个为变号解.

证明 根据 [78] 中的定理 4.1 的证明, 可知定理 4.2.2 的条件 (i) 成立, 我们仅需要检验定理 4.2.2 的条件 (ii) 和定理 4.2.1 中的条件 (iii).

由条件 (C_3) 以及引理 4.5.2, 可得 $A'_\theta = f_0 K$, 算子 $f_0 K$ 的特征值为 $\frac{\lambda_1}{f_0}$, $\frac{\lambda_2}{f_0}$, $\cdots$. 既然 $f_0 > \lambda_1$, 可知 A'_θ 有一个特征值 $\frac{\lambda_1}{f_0} < 1$. 进一步, 根据 [78] 定理 4.1 的证明, 可得相应的特征函数 ψ 满足 $\mu_1 e \leq \psi \leq \mu_2 e$, 其中 $\mu_1 > 0$ 和 $\mu_2 > 0$. 这意味着定理 4.2.2 中的条件 (ii) 成立.

根据条件 (C_4) 和引理 4.5.3, 可得 $A'_\infty = f_\infty K$, $r(A'_\infty) = f_\infty r(K) = f_\infty \frac{1}{\lambda_1} > 1$, 以及算子 $f_\infty K$ 的特征值为 $\frac{\lambda_1}{f_\infty}$, $\frac{\lambda_2}{f_\infty}$, $\cdots$. 注意到 $f_\infty \neq \lambda_k$, $k \neq 2, 3, \cdots$, 我们可知 1 不是 A'_∞ 的特征值. 故定理 4.2.1 的条件 (iii) 满足. 证毕.

现在, 我们考察以下椭圆型偏微分方程的边值问题:

$$\begin{cases} L\varphi(x) = f(x, \varphi(x)), & x \in \Omega, \\ B\varphi = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.5.3}$$

其中 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中有界凸开域, $\partial\Omega \in C^{2+\mu}$, $0 < \mu < 1$; $f(x, \varphi) : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^1$ 连续;

$$L\varphi = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + c(x)\varphi$$

是一致椭圆型算子, 即 $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $b_i(x)$, $c(x) \in C^\mu(\overline{\Omega})$, $c(x) > 0$ 且存在常数 $\mu_0 > 0$, 使得对一切 $x \in \overline{\Omega}$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, 皆有 $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \mu_0|\xi|^2$.

$$B\varphi = b(x)\varphi + \delta \sum_{i=1}^{n} \beta_i(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

是边界算子, 其中 $\beta=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$ 是 $\partial\Omega$ 上属于 $C^{1+\mu}$ 的向量场满足 $\beta\cdot\mathbf{n}>0$($\mathbf{n}$ 表 $\partial\Omega$ 上的外法线单位向量). $b(x)\in C^{1+\mu}(\partial\Omega)$, 并且假定是以下三种情形之一:

(i) $\delta=0$ 且 $b(x)\equiv 1$;

(ii) $\delta=1$ 且 $b(x)\equiv 0$;

(iii) $\delta=1$ 且 $b(x)>0$.

根据椭圆型方程理论 [34, 94] 可得, 对于任何 $u\in C(\overline{\Omega})$, 线性边值问题

$$\begin{cases} L\varphi(x)=u(x), & x\in\Omega,\\ B\varphi=0, & x\in\partial\Omega,\end{cases}$$

具有唯一解 $\varphi_u\in C^2(\overline{\Omega})$; 若令

$$(Ku)(x)=\varphi_u(x),\quad x\in\Omega,$$

则 $K:C(\overline{\Omega})\longrightarrow C^2(\overline{\Omega})$ 是线性全连续算子, 具有可数的无界特征值序列:

$$0<\lambda_1<\lambda_2\le\lambda_3\le\cdots,\quad \lambda_n\longrightarrow+\infty,$$

且 $r(K)=\lambda_1^{-1}$.

令 $E=C(\overline{\Omega})$, 则 E 是赋予了范数 $\|\varphi\|=\sup\limits_{x\in\overline{\Omega}}|\varphi(x)|$ 的序 Banach 空间, 且

$$P=\{\varphi\in E|\ \varphi(x)\ge 0,\quad x\in\overline{\Omega}\}$$

是 E 中的正规锥. 显然, E 在 P 诱导的半序 $\le$ 下为一个格, 且 $K(P)\subset P$. 对于 $\varphi\in E$, 定义 Nemytskii 算子

$$(F\varphi)(x)=f(x,\varphi(x)),\quad x\in\overline{\Omega},$$

显然 $F:E\longrightarrow E$ 连续, 令 $A=KF$, 则 $A:E\longrightarrow E$ 是格上的拟可加算子.

方便起见, 列一些条件如下:

(D_1) $\lim\limits_{\varphi\to+\infty}\frac{f(x,\varphi)}{\varphi}=f_{+\infty}$ 对于 $x\in\overline{\Omega}$ 一致成立;

(D_2) $\lim\limits_{\varphi\to-\infty}\frac{f(x,\varphi)}{\varphi}=f_{-\infty}$ 对于 $x\in\overline{\Omega}$ 一致成立;

(D_3) $f(x,0)\equiv 0$, $\lim\limits_{\varphi\to 0}\frac{f(x,\varphi)}{\varphi}=f_0$ 对于 $x\in\overline{\Omega}$ 一致成立.

根据文 [86] 中的引理 4.1 的证明, 可得, $A'_P=f_{+\infty}K$, $A'_{(-P)}=f_{-\infty}K$, $A'_\theta=f_0K$.

令 $e=e(x)$ 为以下边值问题

$$\begin{cases} L\varphi(x)=1, & x\in\Omega, \\ B\varphi=0, & x\in\partial\Omega, \end{cases}$$

的解, 易于检验, A 在 P 和 $-P$ 上 e- 连续.

我们的主要结果如下:

定理 4.5.2 令 f 满足条件 (D_1)-(D_3), 并且 $f_{+\infty}=f_{-\infty}=: f_\infty$. 此外, 设

(i) $f(x,\varphi)$ 关于 φ 为增函数;

(ii) $f_0>\lambda_1$;

(iii) $f_\infty>\lambda_1,\ f_\infty\neq\lambda_k,\ k=2,\ 3,\ \cdots,\ f_\infty<\frac{1}{\|e\|}$.

则边值问题 (4.5.3) 至少存在五个非平凡解, 其中两个为正解，两个为负解, 第五个为变号解.

证明 根据文 [86] 中定理 4.2 的证明, 可知 A 在 P 和 $-P$ 上 e- 连续.

既然算子 A'_θ 的特征值为 $\frac{\lambda_1}{f_0},\ \frac{\lambda_2}{f_0},\cdots$, 由条件 (ii) 可得 A'_θ 有一个特征值 $\frac{\lambda_1}{f_0}<1$. 进一步, 根据条件 (iii), 我们有

$$r(A'_\infty)=f_\infty r(K)=\frac{f_\infty}{\lambda_1}>1.$$

既然算子 A'_∞ 的特征值为 $\frac{\lambda_1}{f_\infty},\ \frac{\lambda_2}{f_\infty},\ \cdots$. 注意到 $f_\infty\neq\lambda_k,\ k=2,3,\cdots$, 可得 1 不是 A'_∞ 的特征值. 因此, 定理 4.4.1 的所有条件均满足, 证毕.

为获取 (4.5.3) 的多重变号解, 列假设如下:

(E_1) $f(x,0)\equiv 0,\ \forall\ x\in\overline{\Omega};\ f(x,\varphi)\varphi>0,\ \forall\ x\in\overline{\Omega},\ \varphi\neq 0,\ \varphi\in(-\infty,+\infty)$;

(E_2) $\lim\limits_{\varphi\longrightarrow 0}\frac{f(x,\varphi)}{\varphi}=f_0$ 对 $x\in\overline{\Omega}$ 一致成立, 且 $\lambda_n<f_0<\lambda_{n+1}$, 其中 n 为偶数;

(E_3) $\lim\limits_{\varphi\longrightarrow\infty}\frac{f(x,\varphi)}{\varphi}=f_\infty$ 对 $x\in\overline{\Omega}$ 一致成立, 且 $\lambda_{n_0}<f_\infty<\lambda_{n_0+1}$, 其中 n_0 为偶数;

(E_4) 存在常数 $r<1$ 使得 $\lim\limits_{\varphi\longrightarrow 0}\frac{f(x,\varphi)}{\varphi}=r\frac{1}{\|e\|}$ 对 $x\in\overline{\Omega}$ 一致成立.

定理 4.5.3 设条件 (E_1)-(E_4) 均满足. 则 (4.5.3) 至少有两个变号解, 进而有两个正解和两个负解.

证明 由条件 (E_1) 可得

$$f(x,\varphi)>0,\quad \forall\ \varphi>0;\quad f(x,\varphi)<0,\quad \forall\ \varphi<0.$$

重复文 [89] 中定理 3.4 中的证明过程, 可得 $A((E_{e_0} \cap P)\backslash\{\theta\}) \subset int(E_{e_0} \cap P)$, 以及 $A(-(E_{e_0} \cap P)\backslash\{\theta\}) \subset int(-(E_{e_0} \cap P))$, 其中

$$E_{e_0} = \{\varphi \in E: 存在\ \mu > 0\ 使得\ -\mu e_1(x) \leq \varphi \leq \mu e_1(x)\},$$

$$int(E_{e_0} \cap P) = \{\varphi \in (E_{e_0} \cap P): 存在\ \alpha > 0\ 及\ \beta > 0\ 使得\ \alpha e_1(x) \leq \varphi(x) \leq \beta e_1(x)\},$$

这里 e_1 是 K 对应于第一特征值 λ_1 的第一就范特征函数.

从条件 (E_2) 和 (E_3) 可知, 定理 4.3.1 中的条件 (H_1) 和 (H_2) 成立.

下证定理 4.3.1 中的条件 (H_3) 满足, 由条件 (E_4) 可得存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |\varphi| < \delta$ 时, 有

$$\frac{f(x,\varphi)}{\varphi} < \frac{1+r}{2\|e\|}, \quad x \in \overline{\Omega},$$

即

$$|f(x,\varphi)| < \frac{1+r}{2\|e\|}|\varphi|, \quad x \in \overline{\Omega}.$$

则

$$\|A\varphi\| \leq \frac{1+r}{2\|e\|}\|e\|\|\varphi\|.$$

因此,

$$\lim_{\|\varphi\| \to 0} \frac{\|A\varphi\|}{\|\varphi\|} \leq \frac{1+r}{2} < 1.$$

故定理 4.3.1 中的条件 (H_3) 成立.

第五章　带有变号非线性项的动力学方程与差分方程的正解

§5.1　时间尺度上一类带有变号非线性项动力学方程的正解

§5.1.1　引言

本节选自我们的工作 [95]. 在本节中, 我们研究如下时间尺度上动力学方程正解的存在性:

$$(\phi(u^{\Delta}))^{\nabla}+a(t)f(t,u(t))=0,\quad t\in[0,T], \tag{5.1.1.1}$$

$$\phi(u^{\Delta}(0))=\sum_{i=1}^{m-2}a_i\phi(u^{\Delta}(\xi_i)),\quad u(T)=\sum_{i=1}^{m-2}b_iu(\xi_i) \tag{5.1.1.2}$$

其中 $\phi:R\longrightarrow R$ 是一递增的同胚且同态映射, $\phi(0)=0$.

称映射 $\phi:R\longrightarrow R$ 为递增的同胚且同态映射, 是指以下条件成立:

(i) 若 $x\leq y$, 则 $\phi(x)\leq\phi(y)$, $\forall\ x,y\in R$;

(ii) ϕ 为连续双射且其逆映射也连续;

(iii) $\phi(xy)=\phi(x)\phi(y)$, $\forall x,y\in R$.

贯穿全节, 我们将采用以下假设条件:

(H_1) $0<\xi_1<\cdots<\xi_{m-2}<\rho(T)$, a_i, $b_i\in[0,+\infty)$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^{m-2}a_i<1$, 且 $0<\sum\limits_{i=1}^{m-2}b_i<1$;

(H_2) $a(t)\in C_{ld}([0,T],[0,+\infty))$ 且 $\int_0^{\xi_i}a(\tau)\nabla\tau>0$;

(H_3) $f\in C([0,T]\times[0,+\infty),(-\infty,+\infty))$, 对于 $t\in[0,T]$, 有 $f(t,0)\geq 0$, 且 $a(t)f(t,u(t))\not\equiv 0$.

近年来, 时间尺度上二阶三点边值问题受到了强烈的关注. 与此同时, 带有 p-Laplacian 算子的三点与 m 点边值问题也被广泛地研究 [95-105]. 然而, 对于递增的同胚及同态映射, 研究结果较少.

我们乐意提及 Anderson, Avery 及 Henderson [96], Z. He [98, 99], Sun 及 Li [103], Ma, Du 及 Ge [106], Wang 及 Hou [107], Liu 及 Zhang[108] 的一些结果, 正是其激发我们研究本节的问题.

在 [96] 中, Anderson, Avery 与 Henderson 考察了以下问题:

$$(\phi(u^{\Delta}))^{\nabla}+a(t)f(u(t))=0,\quad t\in(a,b), \tag{5.1.1.3}$$

$$u(a)-B_0(u^{\Delta}(v))=0,\quad u^{\Delta}(b)=0, \tag{5.1.1.4}$$

其中 $\phi(u) = |u|^{p-2}u$, $p > 1$, $v \in (a,b)$, $f \in C_{ld}([0,+\infty),[0,+\infty))$, $a(t) \in C_{ld}((a,b),[0,+\infty))$. 对于某些正数 K_m, K_M, 有 $K_m x \le B_0 x \le K_M x$. 借助于泛函型锥拉伸与压缩不动点定理, 他们建立了上述问题至少存在一个正解的存在性定理.

在 [98, 99] 中, Z.He 考察了时间尺度上 p-Laplacian 动力学方程正解的存在性:

$$(\phi(u^{\Delta}))^{\nabla} + a(t)f(u(t)) = 0, \quad t \in (0,T), \tag{5.1.1.5}$$

满足边值问题

$$u(0) - B_0(u^{\Delta}(\eta)) = 0, \quad u^{\Delta}(T) = 0, \tag{5.1.1.6}$$

及

$$u^{\Delta}(0) = 0, \quad u(T) - B_1(u^{\Delta}(\eta)) = 0, \tag{5.1.1.7}$$

其中 $\phi(u) = |u|^{p-2}u$, $p > 1$, $\eta \in (0,\rho(T))$, $a(t) \in C_{ld}((0,T),[0,+\infty))$, $f \in C([0,+\infty),[0,+\infty))$, 且 $Ax \le B_i x \le Bx (i = 0,1)$ 对于某些正常数 A, B 成立. 分别使用一新的两解与三解不动点定理, 作者获得了问题 (5.1.1.5), (5.1.1.6) 与 (5.1.1.7) 至少两个和三个正解的存在性.

在近年的论文中, Sun 和 Li [103] 研究了如下时间尺度上 p-Laplacian 边值问题

$$(\varphi_p(u^{\Delta}))^{\nabla} + h(t)f(u^{\sigma}(t)) = 0, \quad t \in (0,T), \tag{5.1.1.8}$$

$$u(a) - B_0(u^{\Delta}(a)) = 0, \quad u^{\Delta}(\sigma(b)) = 0, \tag{5.1.1.9}$$

其中 $\varphi_p(u) = |u|^{p-2}u$, $p > 1$. 通过分别应用 Krasnosel'skill、Avery-Henderson 及 Leggett-Williams 不动点定理, 建立了问题 (1.8) 与 (1.9) 的至少一个、两个和三个正解的存在性结果.

在 [12] 中, D.Ma, Z.Du 与 W.Ge 获得了以下边值问题单调正解的存在性:

$$(\phi(u'))' + a(t)f(t,u(t)) = 0, \quad t \in (0,1), \tag{5.1.1.10}$$

$$u'(0) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i u'(\xi_i), \quad u(1) = \sum_{i=1}^{m-2} b_i u(\xi_i). \tag{5.1.1.11}$$

采用的主要工具为单调迭代技巧.

在 [107] 中, Wang 与 Hou 研究了如下 m- 点边值问题:

$$(\phi_p(u'))' + f(t,u(t)) = 0, \quad t \in (0,1), \tag{5.1.1.12}$$

$$\phi_p(u'(0)) = \sum_{i=1}^{n-2} a_i\phi_p(u'(\xi_i)), \quad u(1) = \sum_{i=1}^{n-2} b_i u(\xi_i), \tag{5.1.1.13}$$

其中 $\phi_p(u) = |u|^{p-2}u$, $p > 1$, $\xi_i \in (0,1)$ 满足 $0 < \xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_{n-2} < 1$ 且 a_i, b_i 满足 $a_i, b_i \in [0, +\infty)$, $0 < \sum\limits_{i=1}^{n-2} a_i < 1$, 与 $0 < \sum\limits_{i=1}^{n-2} b_i < 1$.

令

$$f_{\gamma\rho}^{\rho} = \min\left\{\min_{0\le t\le 1} \frac{f(t,u)}{\phi_p(\rho)} : u \in [\gamma\rho, \rho]\right\},$$

$$f_0^{\rho} = \max\left\{\max_{0\le t\le 1} \frac{f(t,u)}{\phi_p(\rho)} : u \in [0, \rho]\right\}.$$

他们获得了以下结果.

定理 5.1.1.1. 假定以下条件成立:

(C_1) 存在 $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \in (0, +\infty)$ 满足 $\rho_1 < \gamma\rho_2$ 且 $\rho_2 < \rho_3$ 使得

$$f_0^{\rho_1} \le \phi_p(m), \quad f_{\gamma\rho_2}^{\rho_2} \ge \phi_p(M\gamma), \quad x \ne Ax \quad x \in \partial\Omega_{\rho_2}, \quad f_0^{\rho_3} \le \phi_p(m);$$

(C_2) 存在 $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \in (0, +\infty)$ 满足 $\rho_1 < \rho_2 < \gamma\rho_3$ 使得

$$f_{\gamma\rho_1}^{\rho_1} \ge \phi_p(M\gamma), \quad f_0^{\rho_2} \le \phi_p(m), \quad x \ne Ax, \quad x \in \partial K_{\rho_2}, \quad f_{\gamma\rho_3}^{\rho_3} \le \phi_p(M\gamma).$$

则 (5.1.1.12), (5.1.1.13) 有两个正解.

我们注意到刘和张 [108] 研究了如下微分方程形式的正解的存在性

$$(\phi(x'))' + q(t)f(x(t)) = 0, \quad t \in (0,1), \tag{5.1.1.14}$$

$$x(0) - \beta x'(0) = 0, \quad x(1) + \delta x'(1) = 0, \tag{5.1.1.15}$$

其中 $\phi: R \longrightarrow R$ 为单增的同胚且正同态映射, $\phi(0) = 0$. 通过使用一不动点指数定理, 他们证明了其一个和两个正解的存在性.

上述文献中, 采用的关键条件为非线性项非负. 若非线性项在某些区间上为负值, 则解不再凹下. 事实上, 涉及到变号非线性项的 p-Laplacian 方程的结果较少.

Agarwal[109] 通过使用上下解方法考察了以下奇异边值问题

$$(\phi_p(y'))' + q(t)f(t, y(t)) = 0, \quad t \in (0,1), \tag{5.1.1.16}$$

$$y(0) = y(1) = 0, \tag{5.1.1.17}$$

其中非线性项 f 允许变号.

在 [110] 中, D.Ji, M.Feng 和 W.Ge 考察了以下边值问题多重正解的存在性:

$$(\phi_p(u'))' + a(t)f(t, u(t)) = 0, \quad t \in (0, 1), \tag{5.1.1.18}$$

$$u(0) = \sum_{i=1}^{m} a_i u(\xi_i), \quad u(1) = \sum_{i=1}^{m} b_i u(\xi_i), \tag{5.1.1.19}$$

其中 $0 < \xi_1 < \cdots < \xi_m < 1$, a_i, $b_i \in [0, +\infty)$ 满足 $0 < \sum\limits_{i=1}^{m-2} a_i, \sum\limits_{i=1}^{m-2} b_i < 1$. 非线性项 f 允许变号. 借助于锥上算子的不动点定理, 给出了 (5.1.1.18) 与 (5.1.1.19) 解的存在性的充分条件.

新近, Y.Zhu 和 J.Zhu [110] 考察了以下时间尺度上 p-Laplacian 多点边值问题:

$$(\phi_p(u^\Delta))^\nabla + a(t)f(t, u(t)) = 0, \quad t \in [0, T], \tag{5.1.1.20}$$

$$\phi_p(u^\Delta(0)) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i \phi_p(u^\Delta(\xi_i)), \quad u(T) = \sum_{i=1}^{m-2} b_i u(\xi_i), \tag{5.1.1.21}$$

其中 $\phi_p(u) = |u|^{p-2}u$, $p > 1$, $\xi_i \in [0, T]$ 满足 $0 < \xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_{m-2} < \rho(T)$. 借助于不动点指数, 他们给出了上述问题多重正解存在的若干充分条件. 特别地, 非线性项可以变号.

本节中, 我们的工作集中在非线性项可变号的情形, 方法来自 [112-114]. 本节如下安排: 第二部分, 我们证明几个预备结果, 第三部分集中讨论 (5.1.1.1) 与 (5.1.1.2) 的正解存在性, 主要工具为不动点指数理论.

§5.1.2 预备知识

为证明主要定理, 我们建立一些引理, 这些引理基于以下线性边值问题

$$(\phi(u^\Delta))^\nabla + h(t) = 0, \quad t \in [0, T], \tag{5.1.2.1}$$

$$\phi(u^\Delta(0)) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i \phi(u^\Delta(\xi_i)), \quad u(T) = \sum_{i=1}^{m-2} b_i u(\xi_i) \tag{5.1.2.2}$$

引理 5.1.2.1. 对于 $h \in C_{ld}[0,T]$, 则边值问题 (5.1.2.1) 及 (5.1.2.2) 有唯一解

$$u(t)=\int_t^T \phi^{-1}\left(\int_0^s h(\tau)\nabla\tau - A\right)\Delta s + \frac{\sum\limits_{i=1}^{m-2} b_i \int_{\xi_i}^T \phi^{-1}\left(\int_0^s h(\tau)\nabla\tau - A\right)\Delta s}{1-\sum\limits_{i=1}^{m-2} b_i}, \tag{5.1.2.3}$$

其中

$$A=-\frac{\sum\limits_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^{\xi_i} h(\tau)\nabla\tau}{1-\sum\limits_{i=1}^{m-2} a_i}.$$

证明 令 u 如 (5.1.2.3) 的定义, 对 (5.1.2.3) 取 delta 微分, 我们有

$$u^{\Delta}(t)=\phi^{-1}\left(-\int_0^t h(\tau)\nabla\tau + A\right),$$

进而, 得到

$$\phi(u^{\Delta})=-\left(\int_0^t h(\tau)\nabla\tau - A\right),$$

对上述表达式进行 nabla 微分后, 有 $(\phi(u^{\Delta}))^{\nabla}=-h(t)$.

接下来, 证明 u 满足 (5.1.2.2) 中的边值条件, 另一方面, 我们有

$$\phi(u^{\Delta}(0))=A=-\frac{\sum\limits_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^{\xi_i} h(\tau)\nabla\tau}{1-\sum\limits_{i=1}^{m-2} a_i},$$

且

$$\phi(u^{\Delta}(\xi_i))=-\frac{\int_0^{\xi_i} h(\tau)\nabla\tau}{1-\sum\limits_{i=1}^{m-2} a_i},$$

使得

$$\sum_{i=1}^{m-2} a_i\phi(u^{\Delta}(\xi_i))=-\frac{\sum\limits_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^{\xi_i} h(\tau)\nabla\tau}{1-\sum\limits_{i=1}^{m-2} a_i},$$

则

$$\phi(u^{\Delta}(0))=\sum_{i=1}^{m-2} a_i\phi(u^{\Delta}(\xi_i)).$$

另一方面, 可得

$$u(T)=\frac{\sum\limits_{i=1}^{m-2}b_i\int_{\xi_i}^{T}\phi^{-1}\left(\int_0^s h(\tau)\nabla\tau-A\right)\Delta s}{1-\sum\limits_{i=1}^{m-2}b_i},$$

且

$$u(\xi_i)=\frac{\int_{\xi_i}^{T}\phi^{-1}\left(\int_0^s h(\tau)\nabla\tau-A\right)\Delta s}{1-\sum\limits_{i=1}^{m-2}b_i},$$

使得

$$\sum_{i=1}^{m-2}b_iu(\xi_i)=\frac{\sum\limits_{i=1}^{m-2}b_i\int_{\xi_i}^{T}\phi^{-1}\left(\int_0^s h(\tau)\nabla\tau-A\right)\Delta s}{1-\sum\limits_{i=1}^{m-2}b_i}=u(T),$$

故

$$u(T)=\sum_{i=1}^{m-2}b_iu(\xi_i).$$

以至于由 (5.1.2.3) 给出的 u 是 (5.1.2.1) 和 (5.1.2.2) 的解.

易于知道边值问题 $(\phi(u^{\Delta}))^{\nabla}=0,\quad \phi(u^{\Delta}(0))=\sum\limits_{i=1}^{m-2}a_i\phi(u^{\Delta}(\xi_i)),\quad u(T)=\sum\limits_{i=1}^{m-2}b_iu(\xi_i)$ 有唯一的平凡解. 则由 (5.1.2.3) 确定的 u 是 (5.1.2.1) 与 (5.1.2.2) 的唯一解.

令 $C_{ld}[0,T]$ 上的范数为最大值范数. 则 $C_{ld}[0,T]$ 为 Banach 空间. 我们定义两个锥如下

$$K=\{u|u\in C_{ld}[0,T],u(t)\geq 0,\forall\, t\in[0,T]\},$$

且

$$P'=\{u|u\in C_{ld}[0,T],u\ \text{在}[0,T]\ \text{上非负, 凹且单调减少}\}.$$

引理 5.1.2.2([111]) 若 $u\in P'$ 且满足 (5.1.2.2), 则

$$\inf_{t\in[0,T]}u(t)\geq\gamma\parallel u\parallel,$$

其中

$$\gamma=\sum_{i=1}^{m-2}b_i(1-\frac{\xi_i}{T}),\qquad \|u\|=\max_{t\in[0,T]}|u(t)|.$$

令

$$K' = \{u | u \in C_{ld}[0,T], u \text{ 在 } [0,T] \text{ 上非负且单调减少}, \min_{t\in[0,T]} u(t) \geq \gamma \parallel u \parallel\},$$

其中 γ 同引理 5.1.2.2 定义一样.

令 $X = C_{ld}[0,T]$, 定义算子 A, T, T' 如下.

$$\begin{aligned}(Au)(t) &= \int_t^T \phi^{-1}\left(\int_0^s a(\tau)f(\tau,u(\tau))\nabla\tau - \tilde{A}\right)\Delta s \\ &+ \frac{\sum\limits_{i=1}^{m-2} b_i \int_0^{\xi_i} \phi^{-1}\left(\int_0^s a(\tau)f(\tau,u(\tau))\nabla\tau - \tilde{A}\right)\Delta s}{1-\sum\limits_{i=1}^{m-2} b_i},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(Tu)(t) &= \left(\int_t^T \phi^{-1}\left(\int_0^s a(\tau)f(\tau,u(\tau))\nabla\tau - \tilde{A}\right)\Delta s\right. \\ &\left.+ \frac{\sum\limits_{i=1}^{m-2} b_i \int_0^{\xi_i} \phi^{-1}\left(\int_0^s a(\tau)f(\tau,u(\tau))\nabla\tau - \tilde{A}\right)\Delta s}{1-\sum\limits_{i=1}^{m-2} b_i}\right)^+,\end{aligned}$$

其中

$$(B)^+ = \max\{B, 0\}, \quad \tilde{A} = -\frac{\sum\limits_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^{\xi_i} a(\tau)f(\tau,u(\tau))\nabla\tau}{1-\sum\limits_{i=1}^{m-2} a_i}.$$

对于 $u \in X$, 定义 $\theta : X \longrightarrow K$ 为 $(\theta u)(t) = \max\{u(t), 0\}$, 则 $T = \theta \circ A$.

$$\begin{aligned}(T'u)(t) &= \int_t^T \phi^{-1}\left(\int_0^s a(\tau)f^+(\tau,u(\tau))\nabla\tau - \tilde{A}_1\right)\Delta s \\ &+ \frac{\sum\limits_{i=1}^{m-2} b_i \int_0^{\xi_i} \phi^{-1}\left(\int_0^s a(\tau)f^+(\tau,u(\tau))\nabla\tau - \tilde{A}_1\right)\Delta s}{1-\sum\limits_{i=1}^{m-2} b_i},\end{aligned}$$

其中

$$f^+(t,u) = \max\{f(t,u), 0\}, \quad \tilde{A}_1 = -\frac{\sum\limits_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^{\xi_i} a(\tau)f^+(\tau,u(\tau))\nabla\tau}{1-\sum\limits_{i=1}^{m-2} a_i}.$$

A 和 T' 的全连续的证明一样, 我们仅证明 $T': K' \longrightarrow K'$ 全连续.

引理 5.1.2.3 $T': K' \to K'$ 全连续.

证明 首先, 我们证明 $T'(K') \subset K'$.

$\forall u \in K'$, 易于检验 $T'u$ 非负, 凹且在 $[0,T]$ 上递减. 则 $T'u \in P'$. 进一步, 可知 $T'u$ 满足 (5.1.2.2). 这样, 引理 5.1.2.2 意味着

$$\inf_{t\in[0,T]}(T'u)(t) \geq \gamma \parallel T'u \parallel,$$

i.e., $T'u \in K'$. 因此, 我们可得 $T'(K') \subset K'$.

其次, 我们证明 T' 映有界集到自身.

假设 $e > 0$ 为常数, 且 $u \in \overline{K'_e} = \{u \in K' : \parallel u \parallel \leq e\}$. 注意到 f^+ 的连续性确保了, 存在 $L > 0$ 使得 $f^+(t, u(t)) \leq \phi(L)$ 对于 $t \in [0,T]$ 成立. 因此

$$\begin{aligned}\parallel T'u \parallel &= \max_{t\in[0,T]}(T'u)(t)\\ &\leq L\phi^{-1}\left(\int_0^T a(\tau)\nabla\tau + \frac{\sum\limits_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^{\xi_i} a(\tau)\nabla\tau}{1-\sum\limits_{i=1}^{m-2} a_i}\right) \times \left(\int_0^T \Delta s + \frac{\sum\limits_{i=1}^{m-2} b_i \int_{\xi_i}^T \Delta s}{1-\sum\limits_{i=1}^{m-2} b_i}\right).\end{aligned}$$

故 $T'\overline{K'_e}$ 一致有界.

此外, 注意到对于任意的 $t_1, t_2 \in [0,T]$, 有

$$\begin{aligned}&|(T'u)(t_1) - (T'u)(t_2)|\\ &= \left|\int_{t_1}^{t_2} \phi^{-1}\left(\int_0^s a(\tau)f^+(\tau, u(\tau))\nabla\tau - \tilde{A}_1\right)\Delta s\right|\\ &\leq L|t_1 - t_2|\phi^{-1}\left(\int_0^T a(\tau)\nabla\tau + \frac{\sum\limits_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^{\xi_i} a(\tau)\nabla\tau}{1-\sum\limits_{i=1}^{m-2} a_i}\right).\end{aligned}$$

故应用时间尺度上的 Arzela-Ascoli 定理 [115], 可得 $T'(K')$ 相对紧.

最后, 从 f 和 $a(t) \in C_{ld}([0,T],[0,+\infty))$ 的连续性, 可得 T' 连续. 因此, T' 全连续. 证毕.

既然 $A: K \longrightarrow X$ 全连续, 由 [113] 的引理 3.2, 或 [114] 中的引理 3, 我们可得 $T = \theta \circ A : K \longrightarrow K$ 全连续.

本节的主要工具基于以下不动点指数理论.

引理 5.1.2.4([8, 12]) 令 $\mathbf{B}$ 为 Banach 空间, 且令 $K \subset \mathbf{B}$ 为 $\mathbf{B}$ 中的锥. 设 $r > 0$ 且 $T : K_r \longrightarrow K$ 全连续, 使得 $Tx \neq x$ 对于 $\partial K_r := \{x \in K : \|x\| = r\}$ 成立. 则以下结论成立:
(1) 若对于所有 $x \in \partial K_r$, 有 $\|x\| \leq \|Tx\|$, 则 $i(T, K_r, K) = 0$.
(2) 若对于所有的 $x \in \partial K_r$, 有 $\|x\| \geq \|Tx\|$, 则 $i(T, K_r, K) = 1$.

§5.1.3 正解的存在性定理

方便起见, 给出以下记号:

$$M = \phi^{-1}\left(\int_0^T a(\tau)\nabla\tau + \frac{\sum\limits_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^{\xi_i} a(\tau)\nabla\tau}{1 - \sum\limits_{i=1}^{m-2} a_i}\right) \times \frac{T - \sum\limits_{i=1}^{m-2} b_i\xi_i}{1 - \sum\limits_{i=1}^{m-2} b_i},$$

$$\begin{aligned} N &= \phi^{-1}\left(\frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^{\xi_i} a(\tau)\nabla\tau}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i}\right) T \\ &+ \frac{\sum\limits_{i=1}^{m-2} b_i \phi^{-1}\left(\int_0^{\xi_i} a(\tau)\nabla\tau + \frac{\sum\limits_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^{\xi_i} a(\tau)\nabla\tau}{1 - \sum\limits_{i=1}^{m-2} a_i}\right)(T - \xi_i)}{1 - \sum\limits_{i=1}^{m-2} b_i}. \end{aligned}$$

定理 5.1.3.1 设 $(H_1), (H_2)$ 且 (H_3) 成立, 存在 $c, b, d > 0$ 使得 $0 < \frac{d}{\gamma} < c < \gamma b < b$. 且假定 f 满足以下条件:
(H_4) $f(t, u) \geq 0, \quad (t, u) \in [0, T] \times [d, b]$;
(H_5) $f(t, u) < \phi(\frac{c}{M}), \quad (t, u) \in [0, T] \times [0, c]$;
(H_6) $f(t, u) > \phi(\frac{b}{N}), \quad (t, u) \in [0, T] \times [\gamma b, b]$.
则 (5.1.1.1), (5.1.1.2) 至少有两个正解 u_1 及 u_2.

证明 首先, 我们证明 T 有一个不动点 $u_1 \in K$ 满足 $0 < \|u_1\| < c$. 对于所有的

$u \in \partial K_c$, 由 (H_5), 有

$$
\begin{aligned}
&\int_0^s a(\tau)f(\tau,u(\tau))\nabla\tau - \tilde{A} \\
&= \int_0^s a(\tau)f(\tau,u(\tau))\nabla\tau + \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^{\xi_i} a(\tau)f(\tau,u(\tau))\nabla\tau}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i} \\
&< \phi(\frac{c}{M})\left[\int_0^s a(\tau)\nabla\tau + \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^{\xi_i} a(\tau)\nabla\tau}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i}\right],
\end{aligned}
$$

使得

$$
\begin{aligned}
&\phi^{-1}\left(\int_0^s a(\tau)f(\tau,u(\tau))\nabla\tau - \tilde{A}\right) \\
&< \frac{c}{M}\phi^{-1}\left(\int_0^s a(\tau)\nabla\tau + \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^{\xi_i} a(\tau)\nabla\tau}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i}\right). \\
&< \frac{c}{M}\phi^{-1}\left(\int_0^T a(\tau)\nabla\tau + \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^{\xi_i} a(\tau)\nabla\tau}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i}\right).
\end{aligned}
$$

因此, 可得

$$
\begin{aligned}
\|Tu\| &= \max_{t\in[0,T]}\left(\int_t^T \phi^{-1}\left(\int_0^s a(\tau)f(\tau,u(\tau))\nabla\tau - \tilde{A}\right)\Delta s\right)^+ \\
&+ \max_{t\in[0,T]}\left(\frac{\sum_{i=1}^{m-2} b_i \int_{\xi_i}^T \phi^{-1}\left(\int_0^s a(\tau)f(\tau,u(\tau))\nabla\tau - \tilde{A}\right)\Delta s}{1-\sum_{i=1}^{m-2} b_i}\right)^+ \\
&< \frac{c}{M}\phi^{-1}\left(\int_0^T a(\tau)\nabla\tau + \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^{\xi_i} a(\tau)\nabla\tau}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i}\right) \times \left(\int_0^T \Delta s + \frac{\sum_{i=1}^{m-2} b_i \int_{\xi_i}^T \Delta s}{1-\sum_{i=1}^{m-2} b_i}\right)
\end{aligned}
$$

$$= \frac{c}{M}\phi^{-1}\left(\int_0^T a(\tau)\nabla\tau + \frac{\sum\limits_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^{\xi_i} a(\tau)\nabla\tau}{1-\sum\limits_{i=1}^{m-2} a_i}\right) \times \left(T + \frac{\sum\limits_{i=1}^{m-2} b_i(T-\xi_i)}{1-\sum\limits_{i=1}^{m-2} b_i}\right)$$

$$= \frac{c}{M}\phi^{-1}\left(\int_0^T a(\tau)\nabla\tau + \frac{\sum\limits_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^{\xi_i} a(\tau)\nabla\tau}{1-\sum\limits_{i=1}^{m-2} a_i}\right) \times \frac{T-\sum\limits_{i=1}^{m-2} b_i\xi_i}{1-\sum\limits_{i=1}^{m-2} b_i}$$

$$= c = \|u\|.$$

由引理 5.1.2.4, 可知

$$i(T, K_c, K) = 1.$$

故 T 在 K_c 中有一个不动点 u_1. 借助于 (H_3), 我们可知 u_1 也是 A 在 K_c 中的不动点. 因此, u_1 是 (5.1.1.1) 和 (5.1.1.2) 的解.

现在, 我们证明 A 有另一个不动点 u_2 满足 $c < \|u_2\| \leq b$. 对于 $u \in \partial K'_c$, 即 $\|u\| = c$. 由 (H_5), 可知

$$\|T'u\|$$

$$< \frac{c}{M}\phi^{-1}\left(\int_0^T a(\tau)\nabla\tau + \frac{\sum\limits_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^{\xi_i} a(\tau)\nabla\tau}{1-\sum\limits_{i=1}^{m-2} a_i}\right) \times \frac{T-\sum\limits_{i=1}^{m-2} b_i\xi_i}{1-\sum\limits_{i=1}^{m-2} b_i}$$

$$= c = \|u\|.$$

对于 $u \in \partial K'_b$, 即 $\|u\| = b$ 成立. 对于 t $[0,T]$, 有 $\gamma b \leq u(t) \leq b$. 我们可使用 (H_6) 得到

$$\int_0^s a(\tau)f^+(\tau, u(\tau))\nabla\tau - \tilde{A}_1$$

$$= \int_0^s a(\tau)f^+(\tau, u(\tau))\nabla\tau + \frac{\sum\limits_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^{\xi_i} a(\tau)f^+(\tau, u(\tau))\nabla\tau}{1-\sum\limits_{i=1}^{m-2} a_i}$$

$$
> \phi(\frac{b}{N})\left(\int_0^s a(\tau)\nabla\tau + \frac{\sum\limits_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^{\xi_i} a(\tau)\nabla\tau}{1-\sum\limits_{i=1}^{m-2} a_i}\right),
$$

使得

$$
\begin{aligned}
&\phi^{-1}\left(\int_0^s a(\tau)f^+(\tau, u(\tau))\nabla\tau - \tilde{A}_1\right) \\
&> \frac{b}{N}\phi^{-1}\left(\int_0^s a(\tau)\nabla\tau + \frac{\sum\limits_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^{\xi_i} a(\tau)\nabla\tau}{1-\sum\limits_{i=1}^{m-2} a_i}\right).
\end{aligned}
$$

进而可得

$$
\begin{aligned}
&\|T'u\| = (T'u)(0) \\
&= \int_0^T \phi^{-1}\left(\int_0^s a(\tau)f^+(\tau, u(\tau))\nabla\tau - \tilde{A}_1\right)\Delta s \\
&+ \frac{\sum\limits_{i=1}^{m-2} b_i \int_{\xi_i}^T \phi^{-1}\left(\int_0^s a(\tau)f^+(\tau, u(\tau))\nabla\tau - \tilde{A}_1\right)\Delta s}{1-\sum\limits_{i=1}^{m-2} b_i} \\
&> \frac{b}{N}\int_0^T \phi^{-1}\left(\int_0^s a(\tau)\nabla\tau + \frac{\sum\limits_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^{\xi_i} a(\tau)\nabla\tau}{1-\sum\limits_{i=1}^{m-2} a_i}\right)\Delta s \\
&+ \frac{\frac{b}{N}\sum\limits_{i=1}^{m-2} b_i \int_{\xi_i}^T \phi^{-1}\left(\int_0^s a(\tau)\nabla\tau + \frac{\sum\limits_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^{\xi_i} a(\tau)\nabla\tau}{1-\sum\limits_{i=1}^{m-2} a_i}\right)\Delta s}{1-\sum\limits_{i=1}^{m-2} b_i} \\
&> \frac{b}{N}\int_0^T \phi^{-1}\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^{\xi_i} a(\tau)\nabla\tau}{1-\sum\limits_{i=1}^{m-2} a_i}\right)\Delta s
\end{aligned}
$$

$$
+\frac{\frac{b}{N}\sum_{i=1}^{m-2} b_i\int_{\xi_i}^{T}\phi^{-1}\left(\int_0^{\xi_i}a(\tau)\nabla\tau+\frac{\sum_{i=1}^{m-2}a_i\int_0^{\xi_i}a(\tau)\nabla\tau}{1-\sum_{i=1}^{m-2}a_i}\right)\Delta s}{1-\sum_{i=1}^{m-2}b_i}
$$

$$
=\frac{b}{N}\phi^{-1}\left(\frac{\sum_{i=1}^{m-2}a_i\int_0^{\xi_i}a(\tau)\nabla\tau}{1-\sum_{i=1}^{m-2}a_i}\right)T
$$

$$
+\frac{\frac{b}{N}\sum_{i=1}^{m-2} b_i\phi^{-1}\left(\int_0^{\xi_i}a(\tau)\nabla\tau+\frac{\sum_{i=1}^{m-2}a_i\int_0^{\xi_i}a(\tau)\nabla\tau}{1-\sum_{i=1}^{m-2}a_i}\right)(T-\xi_i)}{1-\sum_{i=1}^{m-2}b_i}
$$

$$
=b=\|u\|.
$$

借助于引理 5.1.2.4, 可知

$$
i(T',K'_c,K')=1,\quad i(T',K'_b,K')=0.
$$

因此

$$
i(T',K'_b\backslash\overline{K'_c},K')=0-1=-1,
$$

故 T' 在 $K'_b\backslash\overline{K'_c}$ 中有一个不动点, 且 $c<\|u_2\|\le b$.

最后, 我们证明 u_2 也是 A 在 $K'_b\backslash\overline{K'_c}$ 中的不动点. 我们仅需证明 $Au=T'u$, $\forall u\in(K'_b\backslash\overline{K'_c})\bigcap\{u|T'u=u\}$.

事实上, $\forall u_2\in(K'_b\backslash\overline{K'_c})\bigcap\{u|T'u=u\}$, 有 $u_2(0)=\|u_2\|>c$, 应用引理 5.1.2.2, 可得

$$
\inf_{t\in[0,T]}u_2(t)\ge\gamma\parallel u_2\parallel>\gamma c>d.
$$

故 $d\le u_2(t)\le b$ 对于 $t\in[0,T]$ 成立. 由条件 (H_4), 可知 $f^+(t,u_2(t))=f(t,u_2(t))$. 这意味着 $Au_2=T'u_2=u_2$, $i.e.$, u_2 是一正解, 且 $c<\|u_2\|\le b$.

§5.1.4 一个例子

令 $\mathbb{T}=\{1-(\frac{1}{2})^{N_0}\}\bigcup\{\frac{1}{3},1\}$, N_0 表示所有非负整数集. $T=1$. 考察如下边值问题

$$(\phi(u^\Delta))^\nabla+f(t,u(t))=0,\quad t\in[0,1], \tag{5.1.4.1}$$

$$\phi(u^\Delta(0))=\frac{1}{4}\phi(u^\Delta(\frac{1}{3})),\quad u(T)=\frac{1}{2}u(\frac{1}{3}), \tag{5.1.4.2}$$

其中

$$\phi(u)=u,$$

$$f(t,u)=\begin{cases}1-8u^2, \quad (t,u)\in[0,T]\times[0,\frac{1}{2}],\\ -3+4u, \quad (t,u)\in[0,T]\times[\frac{1}{2},1],\\ 1+\frac{17}{161}(u-1)^2, \quad (t,u)\in[0,T]\times[1,5],\\ 1+\frac{17\times16}{161}+(\frac{486}{11}-\frac{17\times16}{161})(u-5)^2, \quad (t,u)\in[0,T]\times[5,18],\\ 1+\frac{17\times16}{161}+(\frac{486}{11}-\frac{17\times16}{161})13^2-10(u-18)^2,\\ \quad (t,u)\in[0,T]\times[18,+\infty).\end{cases}$$

易于验证 $f:[0,1]\times[0,+\infty)\longrightarrow(-\infty,+\infty)$ 连续. 此情形下, $a(t)\equiv1$, $a_1=\frac{1}{4}$, $b_1=\frac{1}{2}$, $\xi_1=\frac{1}{3}$, 直接计算可得 $M=\frac{50}{27}$, $N=\frac{11}{27}$, $\gamma=\frac{1}{3}$.

选取 $d=1$, $c=5$, $b=18$, 易于检验 $0<\dfrac{d}{\gamma}=\dfrac{1}{\frac{1}{3}}=3<5=c<\gamma b=\frac{1}{3}\cdot18=6<18=b$, 且 f 满足以下条件:

(i) $f(t,u)\geq0,\quad (t,u)\in[0,T]\times[1,18]$;

(ii) $f(t,u)\leq1+\frac{17}{161}(5-1)^2<\frac{27}{10}=\phi(\dfrac{c}{M}),\quad (t,u)\in[0,T]\times[0,5]$;

(iii) $f(t,u)\geq1+\frac{17\times16}{161}+\frac{486}{11}-\frac{17\times16}{161}>\frac{486}{11}=\phi(\frac{b}{N}),\quad (t,u)\in[0,T]\times[6,18]$.

因此, 定理 5.1.3.1 的条件均满足, 问题 (5.1.4.1) 与 (5.1.4.2) 至少有两个正解.

§5.2 一类离散型 p–Laplacian 方程的正解

§5.2.1 引言

本节选自我们的工作 [116]. 本节的目的是寻求以下问题正解的存在性

$$\begin{cases}\Delta[\phi_p(\Delta u(t-1))]+a(t)f(u(t))=0,\quad t\in[1,T+1],\\ \Delta u(0)=u(T+2)=0,\end{cases} \tag{5.2.1.1}$$

其中 ϕ_p is p-Laplacian 算子, i.e. $\phi_p=|s|^{p-2}s,\ p>1,\ (\phi_p)^{-1}=\phi_q,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $T\geq 1$ 是一固定的正整数, Δ 表示步长为 1 的前跳差分算子, 且 $[a,b]=\{a,a+1,\cdots,b-1,b\}\subset Z$ 表示所有整数集.

我们集中在非线性项 $f(u)$ 变号的情形. 通过采用不动点指数理论, 获得了边值问题 (5.2.1.1) 至少存在两个正解的一些新结果. 其方法受文献 [110, 111] 的激发. 由于在诸多领域的广泛应用, 诸如经济学、神经网络, 生态学与控制论等, 自 1970 年以来, 非线性差分方程理论已被广泛研究, 参见 [117-120]. 与此同时, 差分方程边值问题也受到众多学者的关注, 参见 [117, 118, 121-127]. 其方法主要基于不动点定理. 例如, 在 [123] 中, 通过使用锥上的 Guo-Krasnosel'skii 不动点定理和不动点指数理论, 作者获得了边值问题 (5.2.1.1) 的一个及两个正解的存在性定理. 在 [124] 中, Li 与 Lu 借助于 Avery-Henderson 不动点定理, 给出了 (5.2.1.1) 至少存在两个正解的结果. 进一步, 受 [123, 124] 的激发, 在 [126] 中, Wang 及 Guan 通过应用 Avery 五泛函不动点定理, 获得了 (5.2.1.1) 至少有三个正解.

另一方面, 临界点理论已被应用于差分方程的研究中, 在 [121] 中, Pasquale Candito 考察了以下问题

$$\begin{cases} -\Delta[\phi_p(\Delta u(t-1))]=\lambda f(k,u(k)), & k\in[1,T], \\ u(0)=u(T+1)=0, \end{cases} \tag{5.2.1.2}$$

通过临界点理论, 建立了边值问题 (5.2.1.2) 至少三个解和两个正解的存在性定理. 然而, 几乎上述所有工作仅考察的是 p-Laplacian 方程带有非负非线性项的情形. 因此, 一个自然的问题是, 考察非线性项变号时, p-Laplacian 方程正解的存在性.

贯穿本节, 我们假设以下条件满足:

(H_1) $a:[1,T+1]\longrightarrow(0,+\infty)$;

(H_2) $f:[0,+\infty)\longrightarrow R$ 连续.

§5.2.2 预备知识及引理

令

$$E=\{u:[0,T+2]\longrightarrow R|\Delta u(0)=u(T+2)=0\},$$

赋予范数 $\|u\|=\max\limits_{t\in[0,T+2]}|u(t)|$, 则 $(E,\|\cdot\|)$ 为一 Banach 空间. 定义两个锥如下

$$P=\{u:u\in E,\ u(t)\geq 0,\ t\in[0,T+2]\},$$

与

$$P'=\{u:u\in E,\ u \text{ 在 } [0,T+2] \text{ 上是凹的且非负单调减少}\}.$$

引理 5.2.2.1([123, 124, 126]) 若 $u \in P'$, 则 $u(t) \geq \frac{T+2-t}{T+2}\|u\|$ for $t \in [0, T+2]$.

令

$$K = \{u : u \in E,\ u \text{ 在 } [0, T+2] \text{ 上非负且单调减少},\ u(t) \geq \gamma\|u\|,\ t \in [0, l]\},$$

其中 $\gamma = \dfrac{T+2-l}{T+2}\gamma_1$, $\gamma_1 = \dfrac{(T+2-l)\phi_q[\sum\limits_{i=1}^{l} a(i)]}{\sum\limits_{s=0}^{T+1}\phi_q[\sum\limits_{i=1}^{s} a(i)]}$, $l \in Z$ 固定, 使得 $0 < l < T+2$.

注意到 u 是边值问题 (5.2.1.1) 的解当且仅当

$$u(t) = \sum_{s=t}^{T+1} \phi_q\left[\sum_{i=1}^{s} a(i) f(u(i))\right],\ t \in [0, T+2].$$

我们定义算子 $F : P \longrightarrow E$ 与 $S : K \longrightarrow E$ 如下

$$(Fu)(t) = \sum_{s=t}^{T+1} \phi_q\left[\sum_{i=1}^{s} a(i) f(u(i))\right],\ t \in [0, T+2], \tag{5.2.2.1}$$

$$(Su)(t) = \sum_{s=t}^{T+1} \phi_q\left[\sum_{i=1}^{s} a(i) f^+(u(i))\right],\ t \in [0, T+2], \tag{5.2.2.2}$$

其中 $f^+(u(t)) = \max\{f(u(t)), 0\}$, $t \in [0, T+2]$. 易见 $S : K \longrightarrow K$ 全连续 (参见定理 [123] 中定理 3.1 的证明).

引理 5.2.2.2([12]) 令 K 为 Banach 空间 X 中的锥. D 是 X 中的一有界开子集, 满足 $D_K = D \cap K \neq \phi$ 且 $\overline{D_K} \neq K$. 假设 $A : \overline{D_K} \longrightarrow K$ 全连续, 使得 $x \neq Ax$ 对于 $x \in \partial D_K$ 成立. 则以下结论成立:

(1) 若 $\|Ax\| \leq \|x\|$, $x \in \partial D_K$, 则 $i_K(A, D_K) = 1$;

(2) 若存在 $x_0 \in K \backslash \{\theta\}$ 使得 $x \neq Ax + \lambda x_0$, 对于所有 $x \in \partial D_K$ 及所有 $\lambda > 0$ 成立, 则 $i_K(A, D_K) = 0$;

(3) 令 U 为 X 中的开集, 使得 $\overline{U} \subset D_K$. 若 $i_K(A, D_K) = 1$ 且 $i_K(A, U_K) = 0$, 则 A 在 $D_K \backslash \overline{U_K}$ 中有一不动点. 若 $i_K(A, D_K) = 0$ 与 $i_K(A, U_K) = 1$, 相同的结果成立.

引理 5.2.2.3([128]) 令 $K_\rho = \{u(t) \in K : \|u\| < \rho\}$, $\Omega_\rho = \{u(t) \in K : \min\limits_{0 \leq t \leq l} u(t) < \gamma\rho\}$. 则 Ω_ρ 有以下性质:

(a) $K_{\gamma\rho} \subset \Omega_\rho \subset K_\rho$;

(b) Ω_ρ 相对于 K 为开集;

(c) $x \in \partial\Omega_\rho$ 当且仅当 $\min\limits_{0\le t\le l} x(t) = \gamma\rho$;

(d) 若 $x \in \partial\Omega_\rho$, 则 $\gamma\rho \le x(t) \le \rho$ 对于 $t \in [0,l]$ 成立.

令

$$m = \left\{ \sum_{s=0}^{T+1} \phi_q \left[\sum_{i=1}^{s} a(i) \right] \right\}^{-1}, \tag{5.2.2.3}$$

$$M = \left\{ (T+2-l)\phi_q \left[\sum_{i=1}^{l} a(i) \right] \right\}^{-1}. \tag{5.2.2.4}$$

注记 5.2.2.1. 由 (H_1), 可知 $0 < m, M < +\infty$, $M\gamma = M\frac{T+2-t}{T+2}\gamma_1 = m\frac{T+2-t}{T+2} < m$.

引理 5.2.2.4. 若 f 满足以下条件

$$f(u) \le \phi_p(m\rho), \quad u \in [0,\rho], \quad u \ne Su, \quad u \in \partial K_\rho, \tag{5.2.2.5}$$

则

$$i_K(S, K_\rho) = 1.$$

证明 若 $u \in \partial K_\rho$, 则由 (5.2.2.2), (5.2.2.3) 与 (5.2.2.5), 可得

$$\begin{aligned}(Su)(t) &= \sum_{s=t}^{T+1} \phi_q \left[\sum_{i=1}^{s} a(i) f^+(u(i)) \right] \\ &\le \sum_{s=0}^{T+1} \phi_q \left[\sum_{i=1}^{s} a(i)\phi_p(m\rho) \right] \\ &= \sum_{s=0}^{T+1} m\rho\phi_q \left[\sum_{i=1}^{s} a(i) \right] = \rho.\end{aligned}$$

这意味着 $\|Su\| \le \|u\|$, $u \in \partial K_\rho$. 由引理 5.2.2.2(1), 我们有 $i_K(S, K_\rho) = 1$. 证毕.

引理 5.2.2.5. 若 f 满足以下条件

$$f(u) \ge \phi_p(M\gamma\rho), \quad u \in [\gamma\rho,\rho], \quad u \ne Su, \quad u \in \partial\Omega_\rho, \tag{5.2.2.6}$$

则

$$i_K(S, \Omega_\rho) = 0.$$

证明 令 $e(t) \equiv 1,\ t \in [0, T+2]$, 则 $e \in \partial K_1$. 接下来, 我们证明

$$u \ne Su + \lambda e, \quad u \in \partial\Omega_\rho, \quad \lambda > 0.$$

事实上, 若不然, 则存在 $u_0 \in \partial\Omega_\rho$, 且 $\lambda_0 > 0$ 使得 $u_0 = Au_0 + \lambda_0 e$. 则由 (5.2.2.2), (5.2.2.4) 及 (5.2.2.6), 可得

$$\begin{aligned} u_0(t) &= (Su_0)(t) + \lambda_0 \\ &\geq (Su_0)(l) + \lambda_0 \\ &= \sum_{s=l}^{T+1} \phi_q \left[\sum_{i=1}^{s} a(i) f^+(u_0(i)) \right] + \lambda_0 \\ &\geq (T+2-l)\phi_q \left[\sum_{i=1}^{l} a(i) f^+(u_0(i)) \right] + \lambda_0 \\ &\geq (T+2-l)\phi_q \left[\sum_{i=1}^{l} a(i) \phi_p(M\gamma\rho) \right] + \lambda_0 \\ &= (T+2-l)M\gamma\rho\phi_q \left[\sum_{i=1}^{l} a(i) \right] + \lambda_0 \\ &= \gamma\rho + \lambda_0. \end{aligned}$$

结合引理 5.2.2.3(c), 可知 $\gamma\rho \geq \gamma\rho + \lambda_0$, 矛盾. 故根据引理 5.2.2.2 (2), 得 $i_K(S, \Omega_\rho) = 0$.

§5.2.3 正解的存在性定理

定理 5.2.2.1 设 (H_1) 与 (H_2) 成立, 且假定以下条件之一成立:
(H_3) 存在 $\rho_1, \rho_2 \in (0, +\infty)$ 满足 $\rho_1 < \gamma\rho_2$ 且 $\rho_2 < \rho_3$ 使得

(i) 对于 $u \in [0, \rho_1]$, 有 $f(u) \leq \phi_p(m\rho_1)$;

(ii) 对于 $u \in [\gamma\rho_1, \rho_3]$, 有 $f(u) \geq 0$, 进而对于 $u \in [\gamma\rho_2, \rho_2]$, 有 $f(u) \geq \phi_p(M\gamma\rho_2)$, 且 $x \neq Sx$, $x \in \partial\Omega_{\rho_2}$;

(iii) 对于 $u \in [0, \rho_3]$, 有 $f(u) \leq \phi_p(m\rho_3)$.

(H_4) 存在 ρ_1, ρ_2 且 $\rho_3 \in (0, +\infty)$ 满足 $\rho_1 < \rho_2 < \gamma\rho_3$ 使得

(i) 对于 $u \in [\gamma^2\rho_1, \rho_2]$, 有 $f(u) \geq \phi_p(M\gamma\rho_1)$;

(ii) 对于 $u \in [0, \rho_2]$, 有 $f(u) \leq \phi_p(m\rho_2)$, 且 $x \neq Sx$, $x \in \partial K_{\rho_2}$;

(iii) $f(u) \geq 0$, $u \in [\gamma\rho_2, \rho_3]$, $f(u) \geq \phi_p(M\gamma\rho_3)$, $u \in [\gamma\rho_3, \rho_3]$.

则 (5.2.1.1) 至少有两个正解 u_1 与 u_2.

证明 假设 (H_3) 成立, 我们证明 S 有一个不动点 u_1 或者在 ∂K_{ρ_1} 或者 u_1 在 $\Omega_{\rho_2} \setminus \overline{K_{\rho_1}}$ 中. 若 $u \neq Su$, $u \in \partial K_{\rho_1} \bigcup \partial K_{\rho_3}$, 根据引理 5.2.2.4 及 5.2.2.5, 我们有

$$i_K(S, K_{\rho_1}) = 1, \quad i_K(S, \Omega_{\rho_2}) = 0, \quad i_K(S, K_{\rho_3}) = 1.$$

根据引理 5.2.2.3(b) 及 $\rho_1 < \gamma\rho_2$, 我们有 $\overline{K_{\rho_1}} \subset K_{\gamma\rho_2} \subset \Omega_{\rho_2}$. 由引理 5.2.2.2(3), S 有一个不动点 $u_1 \in \Omega_{\rho_2} \backslash \overline{K_{\rho_1}}$. 类似地, S 有一个不动点 $u_2 \in K_{\rho_3} \backslash \overline{\Omega_{\rho_2}}$. 显然,

$$\|u_1\| > \rho_1, \quad \min_{t \in [0,l]} u_1(t) = u_1(l) \geq \gamma \|u_1\| > \gamma\rho_1.$$

这意味着 $\gamma\rho_1 \leq u_1(t) \leq \rho_2$, $t \in [0, l]$. 由 $(H_3)(ii)$, 我们有 $f(t, u_1(t)) \geq 0$, $t \in [0, l]$, 即 $f^+(t, u_1(t)) = f(t, u_1(t))$. 因此, 可得 $Su_1 = Fu_1$. 这意味着 u_1 是 F 的一个不动点. 从 $u_2 \in K_{\rho_3} \backslash \overline{\Omega_{\rho_2}}$, $\rho_2 < \rho_3$ 及引理 5.2.2.3(b), 可知 $\overline{K_{\gamma\rho_2}} \subset \Omega_{\rho_2} \subset K_{\rho_3}$. 显然, $\|u_2\| > \gamma\rho_2$. 这意味着

$$\min_{t \in [0,l]} u_2(t) = u_2(l) \geq \gamma \|u_2\| > \gamma^2 \rho_2.$$

因此,

$$\gamma^2 \rho_2 \leq u_2(t) \leq \rho_3, \ t \in [0, l].$$

根据 $\rho_1 < \gamma\rho_2$ 及 $(H_3)(ii)$, 有 $f(t, u_2(t)) \geq 0$, $t \in [0, l]$, 即 $f^+(t, u_2(t)) = f(t, u_2(t))$. 故 u_2 是 F 的另一个不动点. 这样, 我们证明了 (5.2.1.1) 至少有两个正解 u_1 及 u_2.

当 (H_4) 成立时, 证明类似, 此处略去. 证毕.

定理 5.2.2.2. 设 (H_1) 与 (H_2) 成立, 且假定以下条件之一满足:

(H_5) 存在 $\rho_1, \rho_2 \in (0, +\infty)$ 满足 $\rho_1 < \gamma\rho_2$ 使得

(i) 对于 $u \in [0, \rho_1]$, 有 $f(u) \leq \phi_p(m\rho_1)$;

(ii) 对于 $u \in [\gamma\rho_1, \rho_2]$, 有 $f(u) \geq 0$, 进而对于 $u \in [\gamma\rho_2, \rho_2]$, 有 $f(u) \geq \phi_p(M\gamma\rho_2)$.

(H_6) 存在 ρ_1, $\rho_2 \in (0, +\infty)$ 满足 $\rho_1 < \rho_2$ 使得

(i) 对于 $u \in [\gamma^2\rho_1, \rho_2]$, 有 $f(u) \geq \phi_p(M\gamma\rho_1)$;

(ii) 对于 $u \in [0, \rho_2]$, 有 $f(u) \leq \phi_p(m\rho_2)$.

则 (5.2.1.1) 至少有一个正解.

§5.2.4 一个例子

考察如下边值问题

$$\begin{cases} \Delta[\phi_p(\Delta u(t-1))]+a(t)f(u(t))=0, \quad t\in[1,4], \\ \Delta u(0)=u(5)=0, \end{cases} \tag{5.2.4.1}$$

其中 $p=3/2,\ q=3,\ a(t)\equiv 1,\ T=3$ 且

$$f(u)=\begin{cases} (u-\frac{6}{25})^{11}, \quad u\in[0,\frac{6}{25}]; \\ (\frac{1}{30})^{\frac{3}{2}}\sin(\frac{75}{57}\frac{\pi}{2}u-\frac{18}{57}\frac{\pi}{2}), \quad u\in[\frac{6}{25},1]; \\ (\frac{1}{30})^{\frac{3}{2}}(6-5u)+(\frac{1}{15})^{\frac{3}{2}}(5u-5) \quad u\in[1,\frac{6}{5}]; \\ (\frac{1}{15})^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{15\times 10^4}(u-\frac{6}{5})^2, \quad u\in[\frac{6}{5},5]; \\ (\frac{1}{15})^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{15\times 10^4}(5-\frac{6}{5})^2[1+(u-5)(8-u)], \quad u\in[5,+\infty). \end{cases}$$

易于验证 $f:[0,+\infty)\longrightarrow R$ 连续. 选取 $l=3$, 直接计算可得

$$\gamma_1=\frac{(3+2-3)\phi_p\left[\sum\limits_{i=1}^{3}a(i)\right]}{\sum\limits_{s=0}^{4}\left[\sum\limits_{i=1}^{s}a(i)\right]}=\frac{2(1+1+1)^2}{\sum\limits_{s=0}^{4}[a(1)+\cdots+a(s)]^2}=\frac{3}{5},$$

$$m=\left\{\sum_{s=0}^{4}\phi_q\left[\sum_{i=1}^{s}a(i)\right]\right\}^{-1}=\left\{\sum_{s=0}^{4}[a(1)+a(2)+\cdots+a(s)]^2\right\}^{-1}=\frac{1}{30},$$

$$\begin{aligned} M &= \left\{(3+2-3)\phi_q\left[\sum_{i=1}^{3}a(i)\right]\right\}^{-1} \\ &= \{2\phi_q[a(1)+a(2)+a(3)]\}^{-1} \\ &= \{2\cdot 3^2\}^{-1}=\frac{1}{18}, \end{aligned}$$

$$\gamma=\frac{T+2-l}{T+2}\gamma_1=\frac{3+2-3}{3+2}\cdot\frac{9}{15}=\frac{2}{5}\cdot\frac{9}{15}=\frac{6}{25}.$$

取 $\rho_1=1,\ \rho_2=5,\ \rho_3=8$, 则 $\gamma\rho_1<\rho_1<\gamma\rho_2<\rho_2<\rho_3$.

此外, 由 f 的定义, 可得

(i) 对于 $u\in[0,1]$ 有 $f(u)\le\phi_p(m\rho_1)=(\frac{1}{30})^{\frac{3}{2}}$;

(ii) 对于 $u\in[\frac{6}{25}\cdot 1,8]$, 有 $f(u)\ge 0$, 进一步, 对于 $u\in[\frac{6}{25}\cdot 5,5]$, 有 $f(u)\ge\phi_p(M\gamma\rho_2)=(\frac{1}{18}\cdot\frac{6}{25}\cdot 5)^{\frac{3}{2}}=(\frac{1}{15})^{\frac{3}{2}}$;

(iii) 对于 $u\in[0,8]$, 有 $f(u)\le\phi_p(m\rho_3)=(\frac{1}{30}\cdot 8)^{\frac{3}{2}}=(\frac{4}{15})^{\frac{3}{2}}$.

由 (5.2.2.2), 可得

$$(Su)(t)=\sum_{s=t}^{4}\phi_q\left[\sum_{i=1}^{s}a(i)f^+(u(i))\right]=\sum_{s=t}^{4}\left[a(1)f^+(u(1))+\cdots+a(s)f^+(u(s))\right]^2.$$

既然 $f^+(u)\le(\frac{1}{15})^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{15\times10^4}(5-\frac{6}{5})^2$, $u\in[0,5]$, $t\in[0,5]$. 对于 $u\in\partial\Omega_5$, 我们有

$$\begin{aligned}\|Su\| &= Su(0)\\ &=\sum_{s=0}^{4}[a(1)f^+(u(1))+\cdots+a(s)f^+(u(s))]^2\\ &=[f^+(u(1))]^2+[f^+(u(1))\\ &+f^+(u(2))]^2+[f^+(u(1))+f^+(u(2))+f^+(u(3))]^2\\ &+[f^+(u(1))+f^+(u(2))+f^+(u(3))+f^+(u(4))]^2\\ &\le 30[f^+(u)]^2<30(\tfrac{2}{375})^2<5=\|u\|.\end{aligned}$$

这意味着 $Su\ne u$, 对于 $u\in\partial\Omega_5$ 成立. 这样, 定理 5.2.2.1 中条件 (H_3) 满足. 因此, 边值问题 (5.2.4.1) 有两个正解 u_1, u_2.

§5.3 时间尺度上二阶 Sturm-Liouville 半正问题的正解集的结构

§5.3.1 引言

在本节中, 我们研究以下时间尺度上二阶非线性 Sturm-Liouville 问题的正解集的结构

$$(py^{\Delta})^{\nabla}(t)+\lambda f(t,y(t))=0,\quad t\in(a,b]_{\mathbb{T}},\tag{5.3.1.1}$$

$$\alpha y(a)-\beta(py^{\Delta})(a)=0,\quad \gamma y^{\sigma}(b)+\delta(py^{\Delta})(b)=0,\tag{5.3.1.2}$$

其中 $\lambda>0$,

$$p:\ [a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}}\longrightarrow(0,+\infty),\quad p\in C[a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}},\tag{5.3.1.3}$$

$$\beta,\ \delta\in(0,+\infty),\quad \alpha,\ \gamma\in[0,+\infty),\quad \beta\gamma+\alpha\delta+\alpha\gamma\int_a^{\sigma(b)}\frac{\Delta\tau}{p(\tau)}>0.\tag{5.3.1.4}$$

我们指出连续函数 $f:(a,b]_{\mathbb{T}}\times[0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ 是半正的, 即存在 $M\ge0$ 使得 $f(t,y)\ge-M$ 对于所有的 $t\in(a,b]_{\mathbb{T}}$ 及 $y\ge0$ 成立.

涉及到时间尺度上半正问题的正解集结构的文献较少. 我们愿意提及 Kaufmann 和 Kosmatov [129], Anderson 及 Wong [26], Sun 和 Li [130], Davidson 与 Rynne [131], Luo [132] 的一些结果, 正是上述文献激发我们考察 (5.3.1.1) 和 (5.3.1.2).

在 2007 年, Kaufmann 和 Kosmatov [129] 研究了如下非线性 Sturm-Liouville 问题：

$$-x^{\Delta\Delta}(t)=\lambda f(t,x(\sigma(t))),\ t\in[0,1]_{\mathbb{T}}, \tag{5.3.1.5}$$

$$\alpha x(0)-\beta x^{\Delta}(0)=0,\quad \gamma x(\sigma(1))+\delta x^{\Delta}(\sigma(1))=0, \tag{5.3.1.6}$$

其中 $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta\geq 0,\ \gamma\beta+\alpha\delta+\alpha\gamma\sigma(1)>0$. 对于函数 f, 作者强加了如下假设:
(H_1) $f:\mathbb{T}\times[0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ 连续, 且存在 $M>0$ 使得在 $\mathbb{T}\times[0,+\infty)$ 上, 有 $f(t,y)+M\geq 0$;
(H_2)

$$\lim_{y\longrightarrow\infty}\frac{f(t,y)}{y}=\infty$$

在 $[\mu,\nu]$ 上一致成立, 其中 $\mu=\min\{\tau\in\mathbb{T}:\ \tau\geq\frac{\sigma(1)}{4}\},\ \nu=\max\{\tau\in\mathbb{T}:\ \tau\leq\frac{3\sigma(1)}{4}\}$. 作者获得以下定理.

定理 5.3.1.([129].) 假设 (H_1)-(H_2) 满足. 则对于充分小的 $\lambda>0$, 边值问题 (5.3.1.5) 及 (5.3.1.6) 至少有一个正解.

我们注意到 Anderson 和 Wong [26] 使用与 (H_1) 和 (H_2) 相同的条件研究了半正边值问题 (5.3.1.1) 与 (5.3.1.2), 且建立了相似的定理 (见 [26] 中的定理 3.2). Sun 与 Li [130] 讨论了以下半正边值问题：

$$-x^{\Delta\Delta}(t)=f(t,x(t)),\ t\in[0,T]_{\mathbb{T}}, \tag{5.3.1.7}$$

$$x(0)=0=x(\sigma^2(T)), \tag{5.3.1.8}$$

其中 $T>0$ 固定, 且 $0,T\in\mathbb{T}$, $f:[0,T]_{\mathbb{T}}\times[-\sigma(T)\sigma^2(T)M,+\infty)\longrightarrow[-M,+\infty)$ 连续, $M>0$ 为常数. 然而, 不同于条件 (H_1) 和 (H_2), 对 f 施加的条件是局部的. 换言之, 边值问题 (5.3.1.7) 与 (5.3.1.8) 的可解性仅依赖于 f 在某些有界集上的高度, 而与其在这些有界集之外的取值无关.

另一方面, 近年来, 通过采用全局分歧理论, 针对时间尺度上动力学方程的解集结构, 相继开展了初步的研究. 在 2002 年, Davidson 和 Rynne [131] 研究了时

间尺度上以下边值问题：

$$-u^{\Delta\Delta}(t)+q(t)u^{\sigma}(t)=\lambda u^{\sigma}(t)+f(\lambda,t,u^{\sigma}(t)),\quad t\in\mathbb{T},\tag{5.3.1.9}$$

$$u(0)=u(1)=0,\tag{5.3.1.10}$$

其中 $\lambda\in\mathbb{R}$, 函数 $q:\mathbb{T}\longrightarrow\mathbb{R}$ 与 $f:\mathbb{R}\times\mathbb{T}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 连续, 满足 $f(\lambda,t,x)=o(|x|)$ 对于 x 在 0 附近, λ 在 $\mathbb{R}$ 的有界子集上一致成立. 作者已经证明了在 (5.3.1.9) 和 (5.3.1.10) 线性化特征值处从平凡解分歧出的非平凡解 (λ,u) 的无界连通分支.

新近, Luo [132] 考察了如下时间尺度二阶动力学方程正解的存在性

$$u^{\Delta\Delta}(t)+f(t,u^{\sigma}(t))=0,\quad t\in[0,T]_{\mathbb{T}},\tag{5.3.1.11}$$

$$u(0)=u(\sigma^2(T))=0.\tag{5.3.1.12}$$

作者对问题 (5.3.1.11) 和 (5.3.1.12) 给出了正解分支的全局刻画. 对于其他关于时间尺度半正问题的全局结构, 请参见 [133].

我们应该指出的是, 条件 “(5.3.1.9)-(5.3.1.10) 与 (5.3.1.11)-(5.3.1.12) 中的非线性项是非负” 在获得上述问题正解集的全局结构时起着关键的作用. 在本节中, 借助于 [135, 136] 中获得的两个抽象定理, 我们证明了半正边值问题 (5.3.1.1) 和 (5.3.1.2) 正解集的无界连通分支的存在性.

§5.3.2 一些引理和已知的抽象结果

令 P 是实 Banach 空间 E 中的正规锥, θ 为 E 中的零元, $e\in P\backslash\{\theta\}$, $\|e\|\leq 1$ 且 $Q=\{x\in P|x\geq\|x\|e\}$. 易见 Q 也是 E 中锥.

首先, 我们考察以下超线性算子方程

$$x=\lambda KFx,\quad x\in P,$$

其中 $\lambda>0$ 为一参数. 令

$$S(P)=\overline{\{(\lambda,x)\in[0,+\infty)\times P|\ x\neq\theta,\ x=\lambda Ax\}},$$

$$S(Q)=\overline{\{(\lambda,x)\in[0,+\infty)\times Q|\ x\neq\theta,\ x=\lambda Ax\}}.$$

我们使用的第一个抽象定理为:

定理 5.3.2.1.([134]) 假设以下条件满足:

(A_1) $K:E\longmapsto E$ 是一线性全连续算子, $K:P\longmapsto Q$; $F:P\longmapsto E$ 是一有界连

续算子;

(A_2) 存在 $g_0 \in P$ 和 $\sigma_0 \geq 0$ 使得 $Fx \geq -g_0$, 对于 $x \in P$, 且 $g_1 =: Kg_0 \leq \sigma_0 e$;

(A_3) 当 $g_0 = \theta$ 时, 存在一线性全连续算子 $B : P \longmapsto P$ 使得 $Be \geq \theta$, 且对于 $x \in Q$, 有 $Ax \geq Bx$;

(A_4) $\lim\limits_{x \in D,\ \|x\| \to \infty} \frac{\|KF(x)\|}{\|x\|} = \infty$, 其中 $D = \{x \in E |\ x \geq \|x\| e/2\}$;

(A_5) 当 $g_0 = \theta$ 时, $\lim\limits_{x \in D,\ \|x\| \to 0^+} \frac{\|KF(x)\|}{\|x\|} = \infty$;

则

(a) 当 F 半正时, $S(P)$ 有一无界连通分支 C^*, 趋于 $(0, +\infty)$;

(b) 当 F 为正时, $S(Q)$ 有一无界连通分支 C^*, 其发自 $(0, \theta)$, 且趋于 $(0, \infty)$.

其次, 我们考察以下次线性算子方程

$$x = \lambda KFx + e_0, \quad x \in P,$$

其中 $\lambda > 0$ 为一参数.

令

$$\tilde{S}(P) = \overline{\{(\lambda, x) \in [0, +\infty) \times P |\ x \neq \theta,\ x = \lambda KFx + e_0\}}.$$

我们采用的第二个抽象结果为以下定理.

定理 5.3.2.2([135]) 假设以下条件满足:

(B_1) $K : P \longmapsto Q$ 为一线性全连续算子, $F : P \longmapsto P$ 为一有界连续算子, $e_0 \in (-P)$;

(B_2) 存在 $e_1 \in P$ 和 $\sigma_1 \geq 0$ 使得 $e_0 + e_1 \in Q$ 且 $-e_0 \leq e_1 \leq \sigma_1 e$;

(B_3) $\lim\limits_{x \in Q,\ \|x\| \to \infty} \frac{\|KF(x - e_1)\|}{\|x\|} = 0$.

则以下结论成立:

(i) 若 $e_0 = \theta$ 且 $\lim\limits_{x \in Q,\ x \to \theta} \frac{\|KF(x)\|}{\|x\|} = +\infty$, 则 $\tilde{S}(P)$ 有一无界连通分支 C^* 发自 $(0, \theta)$, 且 $Prj_\lambda C^* = [0, +\infty)$, 其中 $Prj_\lambda C$ 表示 C 在 λ- 轴上的投影;

(ii) 若 $e_0 < \theta$, 且存在 η_0, $\zeta_0 > 0$ 使得当 $x \geq \zeta_0 e$ 时, $\|KFx\| \geq \eta_0$, 则 $\tilde{S}(P)$ 有一无界连通分支 C^* 趋于 (∞, ∞), 且 $Prj_\lambda C^* \supset [\lambda^*, +\infty)$, 其中 λ^* 为一正数.

令 Banach 空间 $E = C[a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}$ 赋予范数 $\|u\| = \sup\limits_{t \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}} |u(t)|$. 定义一锥 $P \subset E$, 如下

$$P = \{u \in E \mid u = u(t) \geq 0, \quad t \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}\}.$$

则 P 为 E 中的正规体锥. 进一步, 令

$$Q = \{u \in P \mid u = u(t) \geq g(t)\|u\|, \quad t \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}\},$$

其中 $g(t)$ 的定义同 (2.4.10). 则 Q 也是 E 中的一个锥.

§5.3.3 边值问题 (5.3.1.1) 与 (5.3.1.2) 的超线性情形

定理 5.3.3.1 令

$$L = \overline{\{(\lambda, y) | \lambda \in [0, +\infty), \ y \neq \theta, \ y \in P, \ y\text{是}(5.3.1.1)\text{和}(5.3.1.2)\text{的解}\}}.$$

假设以下条件满足

(C_1) 存在 $t_1, t_2 \in (a, b]_{\mathbb{T}}$ 使得

$$\lim_{y \longrightarrow \infty} \frac{f(t, y)}{y} = \infty$$

在 $[t_1, t_2]_{\mathbb{T}}$ 上一致成立;

(C_2) 当 $M > 0$ 时, 对于任取的 $[\tilde{t}_1, \tilde{t}_2]_{\mathbb{T}} \subset (a, b]_{\mathbb{T}}$,

$$\lim_{y \longrightarrow 0^+} \frac{f(t, y)}{y} = \infty$$

在 $[\tilde{t}_1, \tilde{t}_2]_{\mathbb{T}}$ 上一致成立;

(C_3) 当 $M = 0$ 时, 存在 $\omega(t) \geq 0$ 使得对于所有的 $(t, y) \in (a, b]_{\mathbb{T}} \times [0, +\infty)$, 有 $f(t, y) \geq \omega(t) y$. 则

(i) 当 $M > 0$ 时, L 具有无界连通分支 C^* 趋于 $(0, +\infty)$;

(ii) 当 $M = 0$ 时, L 具有无界连通分支 C^*, 其发自 $(0, \theta)$, 且趋于 $(0, +\infty)$.

证明 易知问题 (5.3.1.1) 和 (5.3.1.2) 等价于以下不动点方程

$$u(t) = \lambda K F u(t), \quad t \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}},$$

其中算子 $K : E \longrightarrow E$ 与 $F : P \longrightarrow E$ 定义如下:

$$(Fu)(t) = f(t, u(t)), \quad t \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}, \quad u \in P,$$

及

$$(Ku)(t) = \int_a^b G(t, s) u(s) \nabla s, \quad t \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}, \quad u \in E.$$

令 $g_0(t)=M$ (对于所有的 $t\in[a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}}$) 且

$$g_1(t)=M\int_a^b G(t,s)\nabla s,\quad t\in[a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}}.$$

由引理 5.3.2.2, 可得 $K:P\longrightarrow Q$ 为线性全连续算子. 进一步, 据文 [26] 中的引理 3.1, 可知存在 $\sigma_0>0$ 使得 $g_1\le\sigma_0 g(t)$. 由 (C_3), 可知 (A_3) 成立. 据 (C_1), 对于每一个 $X>0$, 存在 $G_0>0$ 使得对于任意给定的 $y\ge G_0$ 和 $t\in[t_1,t_2]_{\mathbb{T}}$, 有

$$f(t,y)\ge Xy.$$

令 $G_1=2G_0(\min\limits_{t\in[t_1,t_2]_{\mathbb{T}}}g(t))^{-1}$. 因此, 对于每一个 $y\in D$, 满足 $\|y\|\ge G_1$, 有

$$y(t)\ge\frac{1}{2}g(t)\|y\|\ge\frac{1}{2}G_1\min_{[t_1,t_2]_{\mathbb{T}}}g(t)=G_0,\tag{5.3.3.1}$$

且对于所有的 $t\in[t_1,t_2]_{\mathbb{T}}$, 有

$$f(t,y(t))\ge Xy(t).\tag{5.3.3.2}$$

由 (5.3.3.1) 和 (5.3.3.2), 对于所有的 $t\in[a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}}$, 可得

$$\begin{aligned}(KFy)(t)&=\int_a^b G(t,s)[f(s,y(s))+M]\nabla s-g_1(t)\\&\ge\int_{t_1}^{t_2}G(t,s)[f(s,y(s))+M]\nabla s-\|g_1\|\\&\ge X\int_{t_1}^{t_2}G(t,s)y(s)\nabla s-\|g_1\|\\&\ge\tfrac{1}{2}X\int_{t_1}^{t_2}G(t,s)g(s)\nabla s\|y\|-\|g_1\|.\end{aligned}$$

故对于 $y\in D$ 且满足 $\|y\|\ge G_1$, 可得

$$\|KFy\|\ge\frac{1}{2}X\int_{t_1}^{t_2}G(t,s)g(s)\nabla s\|y\|-\|g_1\|,$$

对于所有的 $t\in[t_1,t_2]$ 均成立. 因此,

$$\frac{\|KFy\|}{\|y\|}\ge\frac{1}{2}X\min_{t\in[t_1,t_2]_{\mathbb{T}}}\int_{t_1}^{t_2}G(t,s)g(s)\nabla s-\frac{\|g_1\|}{\|y\|},$$

注意到当 $\|y\| \longrightarrow \infty$ 时, 有 $\frac{\|g_1\|}{\|y\|} \longrightarrow 0$, 进而有

$$\lim_{y\in D,\ \|y\|\longrightarrow\infty} \frac{\|KFy\|}{\|y\|} = \infty.$$

这意味着条件 (A_4) 成立.

推论 5.3.3.1 假设定理 5.3.3.1 的所有条件均成立, 则

(a) 当 $M > 0$ 时, 存在 $\lambda^* > 0$ 使得对于所有的 $0 < \lambda < \lambda^*$, (5.3.1.1), (5.3.1.2) 至少有一个正解;

(b) 当 $M = 0$ 时, 存在 $\lambda^* > 0$, 使得对于所有的 $0 < \lambda < \lambda^*$, (5.3.1.1), (5.3.1.2) 至少有两个正解 $x_\lambda^{(1)}$ 与 $x_\lambda^{(2)}$, 满足 $\|x_\lambda^{(1)}\| \le 1 \le \|x_\lambda^{(2)}\|$, 当 $\lambda \to 0^+$ 时, 有 $\|x_\lambda^{(1)}\| \to 0$, $\|x_\lambda^{(2)}\| \to \infty$.

§5.3.4 边值问题 (5.3.1.1) 与 (5.3.1.2) 的次线性情形

首先, 我们列一些将采用的条件.

(D_1) $\lim\limits_{y\longrightarrow+\infty} \dfrac{f(t,y)}{y} = 0$ 在 $(a,b]_{\mathbb{T}}$ 上一致成立;

(D_2) 存在 $[t_1,t_2]_{\mathbb{T}} \subset (a,b]_{\mathbb{T}}$ 使得

$$\lim_{y\longrightarrow 0^+} \frac{f(t,y)}{y} = \infty$$

在 $[t_1,t_2]_{\mathbb{T}}$ 上一致成立;

(D_3) 存在 $[\tilde{t}_1,\tilde{t}_2]_{\mathbb{T}} \subset (a,b]_{\mathbb{T}}$ 与正数 ξ 及 η 使得对于所有的 $(t,y) \in [\tilde{t}_1,\tilde{t}_2]_{\mathbb{T}} \times [\eta,+\infty)$, 有 $f(t,y) + M \ge \xi$.

定理 5.3.4.1 令

$$L = \overline{\{(\lambda,y)|\lambda\in[0,+\infty),\ y\neq\theta,\ y\in Q,\ y\ \text{是(5.3.1.1)和(5.3.1.2)的解}\}}.$$

假设 (D_1) 满足. 则以下结论成立

(i) 若 $M \equiv 0$, 且 (D_2) 成立, 则 L 具有一无界连通分支 C^*, 其发自 $(0,\theta)$ 且 $Prj_\lambda C^* = [0,+\infty)$;

(ii) 若 $M > 0$, 且 (D_3) 成立, 则 L 具有一无界连通分支 C^*, 其趋于 (∞,∞) 且 $Prj_\lambda C^* \supset [\lambda^*,+\infty)$, 其中 λ^* 是一正数.

证明 从定理 5.3.3.1 的证明可知 (B_1) 和 (B_4) 成立. 由 Krein-Rutman 定理 [引理 1.3.4], 存在 $\varphi \in P\backslash\{\theta\}$ 和 $h \in P^*\backslash\{\theta\}$ 使得

$$K\varphi = r(K)\varphi, \qquad K^*h = r(K)h.$$

易见 $\varphi \in Q$ 且对于所有的 $t \in E$, h 可表示为

$$h(y) = \int_a^b \varphi(t)y(t)\nabla t.$$

若 $M \equiv 0$, 则 $e_0 = \theta$. 由 (D_2), 对于任意给定的 $X > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得对于任意的 $0 < y \leq \delta$, 有

$$f(t, y) \geq Xy, \quad t \in [t_1, t_2]_{\mathbb{T}}.$$

于是, 我们得到对于任意的 $y \in Q$ 满足 $0 < \|y\| \leq \delta$, 有

$$\frac{h(F(y))}{h(y)} = \frac{\displaystyle\int_a^b \varphi(s)f(s, y(s))\nabla s}{\displaystyle\int_a^b \varphi(s)y(s)\nabla s} \geq \frac{X\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \varphi(s)y(s)\nabla s}{\displaystyle\int_a^b \varphi(s)y(s)\nabla s} \geq \frac{X\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \varphi(s)g(s)\nabla s}{\displaystyle\int_a^b \varphi(s)\nabla s}.$$

既然 X 任意给定, 则当 $e_0 = \theta$ 时, 有

$$\lim_{y\in Q,\ \|y\|\to 0} \frac{h(F(y))}{h(y)} = +\infty.$$

因此, 当 $M \equiv 0$ 时, 定理 5.3.2.2 中的条件 (i) 成立.

若 $M \not\equiv 0$, 令 $\eta_0 = [\min\limits_{t\in[\tilde{t}_1, \tilde{t}_2]_{\mathbb{T}}} g(t)]^{-1}\eta$ 与 $\xi_0 = \xi \displaystyle\int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} \varphi(t)\nabla t$. 对于任意的 $y \geq \eta_0 g(t)$, 我们有

$$y(t) \geq \eta_0 \min_{t\in[\tilde{t}_1, \tilde{t}_2]_{\mathbb{T}}} g(t) = \eta, \quad t \in [\tilde{t}_1, \tilde{t}_2]_{\mathbb{T}}.$$

由 (D_3), 对于任意的 $y \geq \eta_0 g(t)$, $f(t, y(t)) + M \geq \xi$ 对所有的 $t \in [\tilde{t}_1, \tilde{t}_2]_{\mathbb{T}}$ 均成立. 故对于任意的 $y \geq \eta_0 g(t)$, 有

$$\begin{aligned} h(F(x)) &= \int_a^b \varphi(s)[f(s, y(s)) + M]\nabla s \\ &\geq \int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} \varphi(s)[f(s, y(s)) + M]\nabla s \\ &\geq \xi \int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} \varphi(s)\nabla s = \xi_0, \end{aligned}$$

这蕴含着当 $M \not\equiv 0$ 时, 定理 5.3.2.2 中的结论 (ii) 的假设成立.

接下来, 我们证明定理 5.3.2.2 中的 (B_3) 成立. 对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 根据 (D_1), 存在 $X_0 > 0$ 使得对于任意的 $y > X_0$, 有

$$f(t, y) + M \leq \epsilon y, \quad t \in (a, b]_{\mathbb{T}}. \tag{5.3.4.1}$$

设 $\overline{X}_0 = \max_{t\in(a,b]_{\mathbb{T}},\ y\in[0,X_0]} f(t, y)$. 由 (5.3.4.1), 对于所有的 $t \in (a, b]_{\mathbb{T}}$ 与 $y \in [0, +\infty)$, 我们有

$$f(t, y) + M \leq \epsilon y + \overline{M}_0.$$

于是, 对于任意的 $y \in Q$ 满足 $\|y\| \geq \max\{\sigma_0, \frac{\overline{X}_0}{\epsilon}\} + 1$, 有

$$\begin{aligned}
\frac{h(F(y-g_1))}{h(y)} &= \frac{\displaystyle\int_a^b \varphi(s)[f(s, y(s) - g_1(s)) + M]\nabla s}{\displaystyle\int_a^b \varphi(s)y(s)\nabla s} \\
&\leq \frac{\epsilon \displaystyle\int_a^b \varphi(s)[y(s) - g_1(s)]\nabla s + \overline{X}_0 \int_a^b \varphi(s)\nabla s}{\|y\| \displaystyle\int_a^b \varphi(s)g(s)\nabla s} \\
&\leq \frac{\epsilon \displaystyle\int_a^b \varphi(s)\nabla s}{\displaystyle\int_a^b \varphi(s)g(s)\nabla s} + \frac{\overline{X}_0 \displaystyle\int_a^b \varphi(s)\nabla s}{\|y\| \displaystyle\int_a^b \varphi(s)g(s)\nabla s} \\
&< \frac{2\epsilon \displaystyle\int_a^b \varphi(s)\nabla s}{\displaystyle\int_a^b \varphi(s)g(s)\nabla s}.
\end{aligned}$$

推论 5.3.4.1 假设 (D_1) 满足. 则以下结论成立

(i) 若 $M \equiv 0$, 且 (D_2) 满足, 则对于任意的 λ, 边值问题 (5.3.1.1) 与 (5.3.1.2) 至少有一个正解;

(ii) 若 $M > 0$, 且 (D_3) 满足, 则存在 $\lambda^* > 0$ 使得对于任意的 $\lambda \geq \lambda^*$, 边值问题 (5.3.1.1) 与 (5.3.1.2) 至少有一个正解.

第六章　时间尺度上非线性 m- 点边值问题的正解

§6.1　引言

本节选自我们的工作 [32]. 本节的目的是考察以下时间尺度上 m- 点边值问题正解的存在性与相应的迭代格式

$$u^{\Delta\nabla}(t)+f(t,u(t))=0,\quad t\in[0,1]_{\mathbb{T}}, \tag{6.1.1}$$

$$\beta u(0)-\gamma u^{\Delta}(0)=0,\ u(1)=\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i u(\xi_i),\quad m\geq 3. \tag{6.1.2}$$

近年来, 通过应用不动点定理, 上下解方法与临界点理论, 许多作者已研究了时间尺度上两点及三点边值问题, 参见 [136-144]. 然而, 较少的文献涉及到时间尺度上多点边值问题的计算方法. 我们乐意提及一些结果, 如 N. Aykut Hamel 与 Fulya Yoruk [139], Sun 和 Li [140], 正是上述结果激发我们考察边值问题 (6.1.1) 与 (6.1.2).

在 [139] 中, N. Aykut Hamel 与 Fulya Yoruk 讨论了时间尺度上动力学方程边值问题 (6.1.1) 与 (6.1.2). 借助于锥上的不动点定理和相应线性问题的 Green 函数的性质, 获得了边值问题 (6.1.1) 和 (6.1.2) 至少存在两个及三个正解的充分条件.

在 [140] 中, Sun 和 Li 考察了如下时间尺度上动力学方程正解的存在性:

$$u^{\Delta\nabla}(t)+a(t)f(t,u(t))=0,\quad t\in(0,T), \tag{6.1.3}$$

$$\beta u(0)-\gamma u^{\Delta}(0)=0,\ \alpha u(\eta)=u(T), \tag{6.1.4}$$

其中 $\beta,\gamma\geq 0$,$\beta+\gamma>0,\eta\in(0,\rho(T)),0<\alpha<T/\eta$. 分别采用一不动点定理与 Leggett-Williams 不动点定理, 作者建立了 (6.1.3) 与 (6.1.4) 的单个和多个正解的存在性定理.

我们也乐意提及姚 [145] 的结果. 在 [145] 中, 姚考察了以下非线性二阶三点边值问题的正解存在性

$$u''(t)+f(t,u(t),u'(t))=0,\quad 0\leq t\leq 1, \tag{6.1.5}$$

$$u''(t)+f(t,u(t))=0,\quad 0\leq t\leq 1, \tag{6.1.6}$$

$$u(0) = 0, \quad \alpha u(\eta) = u(1), \tag{6.1.7}$$

其中 η 和 α 为给定的常数, 满足 $0 < \eta < 1$, $0 < \alpha < 1/\eta$. 通过改进古典单调迭代技巧 Amann [34], 建立了 (6.1.5)-(6.1.7) 的两个逐次迭代格式. 值得注意的是迭代格式的首项可以是常函数或简单函数. 我们注意到 Ma[146] 和 Sun [147, 148] 已应用相似的方法到 p-laplacian 边值问题中 $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ 的情形.

本节中, 我们研究边值问题 (6.1.1) 与 (6.1.2) 的正解存在性和迭代收敛性. 通过考察非线性项在某些有界集上的"高度"和应用 Banach 空间上的单调迭代技巧, 我们给出逼近精确解的迭代格式. 应该指出的是, 非线性项的单调性条件在获取迭代格式的过程中起着关键作用. 在本质上, 我们将上下解方法与范数型的锥拉伸和压缩不动点定理相结合. 其思想来源于姚 [145, 149, 150].

我们定义从 $[0,1]_{\mathbb{T}}$ 映到 $\mathbb{R}$ 的连续函数集合为 $C([0,1]_{\mathbb{T}},\mathbb{R})$. 令 $C([0,1]_{\mathbb{T}},\mathbb{R})$ 赋予序结构 $x \le y$ 若 $x(t) \le y(t)$ 对于所有的 $t \in [0,1]_{\mathbb{T}}$ 成立. $\|u\| = \max\limits_{t\in[0,1]_{\mathbb{T}}} |u(t)|$ 为通常的最大值范数. 则 $C([0,1]_{\mathbb{T}},\mathbb{R})$ 为 Banach 空间.

贯穿本节, 我们假设以下条件满足:

(H_1) $\beta,\ \gamma \ge 0,\ 0 < \beta + \gamma \le 1,\ \xi_i \in (0, \rho(1))_{\mathbb{T}}$ 对于 $i = 1, 2, \cdots, m-2$ 满足 $0 < \xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_{m-2} < \rho(1)$;

(H_2) $\sum\limits_{i=1}^{m-2} \alpha_i \in (0,1)$ 满足 $\alpha_i \in (0, +\infty)$ 对于 $i = 1, 2, \cdots, m-2$ 及 $d = \beta(1 - \sum\limits_{i=1}^{m-2} \alpha_i\xi_i) + \gamma(1 - \sum\limits_{i=1}^{m-2} \alpha_i) > 0$ 成立;

(H_3) $f: [0,1]_{\mathbb{T}} \times [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ 连续.

§6.2 预备知识和一些引理

为证明本节的主要结果, 我们将建立一些引理. 这些引理基于以下线性边值问题

$$u^{\Delta\nabla}(t) + h(t) = 0, \quad t \in [0,1]_{\mathbb{T}}, \tag{6.2.1}$$

$$\beta u(0) - \gamma u^{\Delta}(0) = 0,\ u(1) = \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i u(\xi_i), \quad m \ge 3. \tag{6.2.2}$$

引理 6.2.1 ([139]) $d = \beta(1 - \sum\limits_{i=1}^{m-2} \alpha_i\xi_i) + \gamma(1 - \sum\limits_{i=1}^{m-2} \alpha_i) \ne 0$; 则边值问题

$$-u^{\Delta\nabla}(t) = 0, \quad t \in [0,1]_{\mathbb{T}}, \tag{6.2.3}$$

$$\beta u(0)-\gamma u^{\Delta}(0)=0,\ u(1)=\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i u(\xi_i),\quad m\geq 3, \tag{6.2.4}$$

的 Green 函数由下式给出

$$G(t,s)=\frac{1}{d}\begin{cases}(\beta s+\gamma)\left[(1-t)-\sum\limits_{j=1}^{m-2}a_j(\xi_j-t)\right],\\ if\ 0\leq t\leq 1,\ 0\leq s\leq \xi_1,\ s\leq t;\\ (\beta s+\gamma)(1-t)-\sum\limits_{j=i}^{m-2}\alpha_j(\xi_j-t)(\beta s+\gamma)+\sum\limits_{j=1}^{i-1}\alpha_j(\beta\xi_j+\gamma)(t-s),\\ if\ \xi_{r-1}\leq t\leq \xi_r,\ 2\leq r\leq m-1,\ \xi_{i-1}\leq s\leq \xi_i,\ 2\leq i\leq r,\ s\leq t;\\ (\beta t+\gamma)\big[(1-s)-\sum\limits_{j=i}^{m-2}\alpha_j(\xi_j-s)\big],\\ if\ \xi_{r-1}\leq t\leq \xi_r,\ 2\leq r\leq m-2,\ \xi_{i-1}\leq s\leq \xi_i,\ r\leq i\leq m-2,\ t\leq s;\\ (\beta t+\gamma)(1-s),\\ if\ 0\leq t\leq 1,\ \xi_{m-2}\leq s\leq 1,\ t\leq s.\end{cases} \tag{6.2.5}$$

此处, 为方便, 当 $m_2 < m_1$ 时, 记 $\sum\limits_{i=m_1}^{m_2} h(i)=0$.

引理 6.2.2 ([139]) 假设条件 $(H_1)-(H_3)$ 满足. 则
(i) $G(t,s)\geq 0$ 对于 $t,s\in[0,1]_{\mathbb{T}}$ 成立;
(ii) 存在 $\Psi\in(0,1)$ 与连续函数 $\theta:[0,1]_{\mathbb{T}}\longrightarrow\mathbb{R}^+$ 使得

$$G(t,s)\leq\theta(s),\qquad t,s\in[0,1]_{\mathbb{T}}$$

且

$$G(t,s)\geq\Psi\theta(s),\qquad t\in[\xi_1,1]_{\mathbb{T}},\qquad s\in[0,1]_{\mathbb{T}},$$

其中

$$\theta(s)=\max\left\{1,\frac{\sum\limits_{i=1}^{m-2}\alpha_i}{\xi_1}\right\}\frac{(\beta s+\gamma)(1-s)}{d},$$

$$\Psi = \frac{1}{\max\left\{1, \dfrac{\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i}{\xi_1}\right\}} \min_{2\le s\le m-2}\left\{(\beta\xi_1+\gamma)(1-\xi_{m-2}),\ \sum_{j=1}^{m-2}\alpha_j(1-\xi_j)\ ,\right.$$

$$\left.\sum_{j=1}^{s-1}\alpha_j(\beta\xi_j+\gamma)+\sum_{j=s}^{m-2}\alpha_j(1-\xi_j)\right\}.$$

令 $\mathbf{B}=C([0,1]_{\mathbb{T}},\mathbb{R})$. 易见边值问题 (6.1.1) 与 (6.1.2) 有一解 $u=u(t)$ 当且仅当 u 是算子方程

$$Tu(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s))\nabla s$$

的不动点. 定理

$$K=\{u\in\mathbf{B}:\ u \text{ 是非负, 凹的, 且 } \min_{t\in[\xi_1,1]_{\mathbb{T}}} u(t)\ge\Psi\|u\|\},$$

其中 Ψ 同引理 6.2.2 的定义. 借助于 [139] 的引理 3.1, 我们可得 $T(K)\subset K$ 和 $T:K\longrightarrow K$ 全连续.

§6.3 (6.1.1)-(6.1.2) 的一个正解

为方便, 定义

$$A=\left[\max_{t\in[0,1]_{\mathbb{T}}}\int_0^1 G(t,s)\nabla s\right]^{-1},\quad B=\left[\max_{t\in[0,1]_{\mathbb{T}}}\int_{\xi_1}^1 G(t,s)\nabla s\right]^{-1}.$$

常数 A, B 易于具体计算. 简便起见, 可用 A' 代替 A, B' 代替 B, 其中

$$A'=\left[\int_0^1\theta(s)\nabla s\right]^{-1},\quad B'=\left[\Psi\int_{\xi_1}^1\theta(s)\nabla s\right]^{-1}.$$

显然, $0<A'<A<B<B'$.

定理 6.3.1 设 $(H_1)-(H_3)$ 成立, 且存在两个正数 a,b 满足 $b<a$ 使得
(C_1) $\max\{f(t,a):\ t\in[0,1]_{\mathbb{T}}\}\le aA,\ \min\{f(t,\Psi b):\ t\in[\xi_1,1]_{\mathbb{T}}\}\ge bB;$
(C_2) 对于任意的 $t\in[0,1]_{\mathbb{T}}$ 与 $0\le u_1\le u_2\le a$, 有 $f(t,u_1)\le f(t,u_2)$.
则边值问题 (6.1.1) 与 (6.1.2) 至少有一个正解 u^* 使得 $b\le\|u^*\|\le a$ 且 $\lim_{n\to\infty}T^n\tilde{u}=u^*$, 即 $T^n\tilde{u}$ 在 $[0,1]_{\mathbb{T}}$ 上一致收敛到 u^*, 其中 $\tilde{u}(t)\equiv a,\ t\in[0,1]_{\mathbb{T}}$.

注记 6.3.1 定理 6.3.1 中的迭代格式为 $u_1 = T\tilde{u}$, $u_{n+1} = Tu_n$, $n = 1, 2, \cdots$. 它从常函数 $\tilde{u}(t) \equiv a$, $t \in [0,1]_{\mathbb{T}}$ 开始迭代.

定理 6.3.1 的证明 定义 $K[b,a] = \{u \in K : b \leq \|u\| \leq a\}$. 若 $u \in K[b,a]$, 则

$$\max_{t\in[0,1]_{\mathbb{T}}} u(t) \leq a, \quad \min_{t\in[\xi_1,1]_{\mathbb{T}}} u(t) \geq \Psi\|u\| \geq b\Psi.$$

由假设条件 (C_1) 与 (C_2), 可得

$$f(t,u(t)) \leq f(t,a) \leq aA, \quad t \in [0,1]_{\mathbb{T}};$$

$$f(t,u(t)) \geq f(t,b\Psi) \geq bB, \quad t \in [\xi_1,1]_{\mathbb{T}}.$$

进而

$$\begin{aligned}\|Tu\| &= \max_{t\in[0,1]_{\mathbf{T}}} \left|\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s))\nabla s\right| \\ &\leq aA \max_{t\in[0,1]_{\mathbf{T}}} \int_0^1 G(t,s)\nabla s = a; \\ \|Tu\| &\geq \max_{t\in[0,1]_{\mathbf{T}}} \int_{\xi_i}^1 G(t,s)f(s,u(s))\nabla s \\ &\geq bB \max_{t\in[0,1]_{\mathbf{T}}} \int_{\xi_i}^1 G(t,s)\nabla s = b.\end{aligned}$$

这样, 我们确保了 $T : K[b,a] \longrightarrow K[b,a]$.

令 $\tilde{u}(t) \equiv a$, $t \in [0,1]_{\mathbb{T}}$, 则 $\tilde{u} \in K[b,a]$. 令 $u_1 = T\tilde{u}$, 则 $u_1 \in K[b,a]$. 定义 $u_{n+1} = Tu_n$, $n = 1,2,\cdots$. 既然 $T(K[b,a]) \subset K[b,a]$, 我们有 $u_n \in T(K[b,a]) \subset K[b,a]$, $n = 1,2,\cdots$. 注意到 T 全连续, 可知 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有一收敛子列 $\{u_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 且存在 $u^* \in K[b,a]$ 使得 $u_{n_k} \longrightarrow u^*$.

接下来, 既然 $u_1 \in K[b,a]$, 我们有

$$u_1(t) \leq \|u_1\| \leq a = \tilde{u}(t), \quad t \in [0,1]_{\mathbb{T}}.$$

由假设 (C_2), 可得

$$\begin{aligned}u_2(t) &= Tu_1(t) \\ &= \int_0^1 G(t,s)f(s,u_1(s))\nabla s \\ &\leq \int_0^1 G(t,s)f(s,\tilde{u}(s))\nabla s \\ &= T\tilde{u}(t) = u_1(t).\end{aligned}$$

由递推式, 可得

$$u_{n+1}(t) \le u_n(t), \quad t \in [0,1]_{\mathbb{T}}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

因此, $T^n \tilde{u} = u_n \longrightarrow u^*$. 应用 T 的连续性, 与 $u_{n+1} = Tu_n$, 我们有 $Tu^* = u^*$. 既然 $\|u^*\| \ge b > 0$ 且 u^* 是一非负凹函数, 可推出 u^* 是边值问题 (6.1.1) 和 (6.1.2) 的正解.

推论 6.3.1 设 (H_1)-(H_3) 满足, 且以下条件成立

(C_1') $\overline{\lim\limits_{l\to 0}} \min\limits_{t\in[\xi_1,1]_{\mathbb{T}}} f(t,l)/l > \Psi^{-1}B, \quad \underline{\lim\limits_{l\to +\infty}} \max\limits_{t\in[0,1]_{\mathbb{T}}} f(t,l)/l < A$

(特别地, $\lim\limits_{l\to 0} \min\limits_{t\in[\xi_1,1]_{\mathbb{T}}} f(t,l)/l = +\infty, \quad \lim\limits_{l\to +\infty} \max\limits_{t\in[0,1]_{\mathbb{T}}} f(t,l)/l = 0$);

(C_2') 对于任意的 $t \in [0,1]_{\mathbb{T}}$, 和 $u_1 \le u_2$, u_1, $u_2 \in [0,+\infty)$, 有 $f(t,u_1) \le f(t,u_2)$.

则边值问题 (6.1.1) 和 (6.1.2) 至少有一个正解 $u^* \in K$, 且存在一个正数 a 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} T^n a = u^*$, 即

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,1]_{\mathbb{T}}} |T^n a - u^*(t)| = 0.$$

定理 6.3.2 设 (H_1)-(H_3) 成立, 且以下条件满足

(D_1) 存在 $a > 0$ 使得 $f(t,\cdot):\ [0,a] \longrightarrow (0,+\infty)$ 非减, 对于任意的 $t \in [0,1]_{\mathbb{T}}$, 且 $\max\{f(t,a):\ t \in [0,1]_{\mathbb{T}}\} \le aA$;

(D_2) 对于任意的 $t \in [0,1]_{\mathbb{T}}$, 有 $f(t,0) > 0$.

则边值问题 (6.1.1) 和 (6.1.2) 至少有一个正解 u^* 使得 $0 < \|u^*\| \le a$ 且 $\lim\limits_{n\to} T^n 0 = u^*$, 即 $T^n 0$ 在 $[0,1]_{\mathbb{T}}$ 上一致收敛到 u^*. 进一步, 若存在 $0 < \omega < 1$ 使得

$$|f(t,l_2) - f(t,l_1)| \le \omega A |l_2 - l_1|, \quad t \in [0,1]_{\mathbb{T}}, \quad 0 \le l_1,\ l_2 \le a.$$

则 $\|T^{n+1}0 - u^*\| \le \frac{\omega^n}{1-\omega}\|T0\|$.

证明 定义 $K[0,a] = \{u \in K:\ \|u\| \le a\}$. 与定理 6.3.1 的证明相似, 我们可知 $T:\ K[0,a] \longrightarrow K[0,a]$. 令 $\tilde{u}_1 = T0$, 则 $\tilde{u}_1 \in K[0,a]$. 定义 $\tilde{u}_{n+1}(t) = T\tilde{u}_n, \quad n = 1, 2, \cdots$. 重复定理 6.3.1 的相应证明, 可得

$$\tilde{u}_{n+1}(t) \ge \tilde{u}_n(t), \quad t \in [0,1]_{\mathbb{T}}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

既然 T 全连续, 我们得到存在 $u^* \in K[0,a]$ 使得 $\tilde{u}_n \longrightarrow u^*$. 应用 T 的连续性, 及 $\tilde{u}_{n+1}(t) = T\tilde{u}_n$, 可得 $Tu^* = u^*$. 注意到 $f(t,0) > 0$, $\forall\, t \in [0,1]_{\mathbb{T}}$, 这意味着

零函数不是问题 (6.1.1) 和 (6.1.2) 的解. 因此, u^* 是问题 (6.1.1) 和 (6.1.2) 的正解.

接下来, 既然

$$|f(t,l_2)-f(t,l_1)|\le \omega A|l_2-l_1|,\quad t\in[0,1]_{\mathbb{T}},\quad 0\le l_1,\ l_2\le a.$$

若 $u_1,\ u_2\in K[0,a]$ 与 $u_2(t)\ge u_1(t),\ t\in[0,1]_{\mathbb{T}}$, 则

$$\begin{aligned}\|Tu_2-Tu_1\| &= \max_{t\in[0,1]_{\mathbf{T}}}\left|\int_0^1 G(t,s)[f(s,u_2(s))-f(s,u_1(s))]\nabla s\right| \\ &\le \omega A\max_{t\in[0,1]_{\mathbb{T}}}\int_0^1 G(t,s)|u_2(s)-u_1(s)|\nabla s \\ &\le \omega A\|u_2-u_1\|A^{-1} \\ &= \omega\|u_2-u_1\|.\end{aligned}$$

这样, 我们推出

$$\|\tilde{u}_{n+2}-\tilde{u}_{n+1}\|=\|T\tilde{u}_{n+1}-T\tilde{u}_n\|\le\omega^n\|T0-0\|=\omega^n\|T0\|,$$

$$\|\tilde{u}_{n+k+2}-\tilde{u}_{n+1}\|\le(\omega^{n+k}+\omega^{n+k-1}+\cdots+\omega^n)\|T0\|<\frac{\omega^n}{1-\omega}\|T0\|.$$

这意味着

$$\|T^{n+1}0-u^*\|\le\frac{\omega^n}{1-\omega}\|T0\|.$$

§6.4　n 个正解的存在性

定理 6.4.1 设 (H_1)-(H_3) 成立, 并且存在 $2n$ 个正数 $a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_n$ 满足 $b_1<a_1<b_2<a_2<\cdots<b_n<a_n$ 使得

(E_1) $\max\{f(t,a_i):\ t\in[0,1]_{\mathbb{T}}\}\le a_iA,\ \ \min\{f(t,\Psi b_i):\ t\in[\xi_1,1]_{\mathbb{T}}\}\ge b_iB,\ i=1,2,\cdots,n$;

(E_2) 对于任意的 $t\in[0,1]_{\mathbb{T}}$, 及 $0\le u_1\le u_2\le a_n$, 有 $f(t,u_1)\le f(t,u_2)$.

则边值问题 (6.1.1) 和 (6.1.2) 至少有 n 个正解 $u_i^*,\ i=1,2,\cdots,n$ 使得 $b_i\le\|u_i^*\|\le a_i$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}T^n\tilde{u}_i=u_i^*$, 即

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in[0,1]_{\mathbb{T}}}|T^n\tilde{u}_i(t)-u_i^*(t)|=0,$$

其中 $\tilde{u}_i(t)\equiv a_i,\ t\in[0,1]_{\mathbb{T}},\ i=1,2,\cdots,n$.

推论 6.4.1 设 (H_1)-(H_3) 与 (C_1')-(C_2') 成立, 且以下条件满足

(E') 存在 $2(n-1)$ 个正数 $a_1 < b_2 < a_2 < \cdots < b_{n-1} < a_{n-1} < b_n$ 使得

$$\max\{f(t,a_i):\ t\in[0,1]_{\mathbb{T}}\} < a_i A,\quad i=1,\cdots,n-1,$$

$$\min\{f(t,\Psi b_i):\ t\in[\xi_i,1]_{\mathbb{T}}\} > b_i B,\quad i=2,\cdots,n.$$

则边值问题 (6.1.1) 与 (6.1.2) 至少有 n 个正解 u_i^*, $i=1,2,\cdots,n$, 且存在两个正数 b_1, a_n 满足 $b_1 < a_1$, $a_n > b_n$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} T^n\tilde{u}_i = u_i^*$, 其中 $\tilde{u}_i(t)\equiv a_i$, $t\in[0,1]_{\mathbb{T}}$, $i=1,2,\cdots,n$.

§6.5　一些例子

例 6.5.1 令 $\mathbb{T}=[0,\frac{1}{3}]\bigcup[\frac{1}{2},1]$. 考察以下边值问题:

$$u^{\Delta\nabla}(t)+f(t,u)=0,\quad t\in[0,1]_{\mathbb{T}},\tag{6.5.1}$$

$$u(0)=0,\quad u(1)=\frac{1}{8}u(\frac{1}{3})+\frac{1}{6}u(\frac{1}{2}),\tag{6.5.2}$$

其中 $f(t,u)=\frac{200}{109}u^2+1$. 易于验证对于任意的 $t\in[0,1]_{\mathbb{T}}$, 有 $f(t,0)=1>0$.

进一步的计算告诉我们

$$d=\frac{7}{8},$$

与

$$\begin{aligned}A' &= \left[\int_0^1\theta(s)\nabla s\right]^{-1}\\ &= \left[\tfrac{8}{7}\int_0^1 s(1-s)\nabla s\right]^{-1}\\ &= \left\{\tfrac{8}{7}\left[\int_0^{\frac{1}{3}} s(1-s)ds+\int_{\rho(\frac{1}{2})}^{\frac{1}{2}} s(1-s)\nabla s+\int_{\frac{1}{2}}^1 s(1-s)ds\right]\right\}^{-1}\\ &= \tfrac{567}{109}.\end{aligned}$$

选取 $a=1$, 易见 $f(t,\cdot):\ [0,1]_{\mathbb{T}}\longrightarrow[0,+\infty)$ 非减, 对于任意的 $t\in[0,1]_{\mathbb{T}}$. 且

$$\max_{t\in[0,1]_{\mathbb{T}}} f(t,1)=\frac{200}{109}+1\le 1\cdot\frac{567}{109}.$$

令 $\tilde{u}_0(t)\equiv 0$. 对于 $n=0,1,2,\cdots$, 我们有

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{n+1}(t) &= -\int_0^t (t-s)\left(\frac{200}{109}\tilde{u}_n(s)+1\right)\nabla s+\frac{8}{7}t\int_0^1(1-s)\left(\frac{200}{109}\tilde{u}_n(s)+1\right)\nabla s\\ &\quad -\frac{8}{7}t\left[\frac{1}{8}\int_0^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}-s\right)\left(\frac{200}{109}\tilde{u}_n(s)+1\right)\nabla s\right.\\ &\quad \left.+\frac{1}{6}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-s\right)\left(\frac{200}{109}\tilde{u}_n(s)+1\right)\nabla s\right].\end{aligned}$$

由定理 6.3.2, 边值问题 (6.5.1) 与 (6.5.2) 至少有一个正解 u^* 使得 $0<\|u^*\|\le 1$ 且 $T^n 0\longrightarrow u^*$. 另一方面, 对于任意的 $0\le u_1,\ u_2\le 1$, 有

$$\begin{aligned}|f(u_1)-f(u_2)| &= \tfrac{200}{109}|u_1^2-u_2^2|\\ &\le \tfrac{400}{109}|u_1-u_2| = \tfrac{567}{109}\cdot\tfrac{400}{567}|u_1-u_2|\\ &= \tfrac{400}{567}A'|u_1-u_2|.\end{aligned}$$

则

$$\|T^{n+1}0-u^*\|\le \frac{(\frac{400}{567})^n}{1-\frac{400}{567}}\|T0\| = \frac{567}{167}\left(\frac{400}{567}\right)^n\|T0\|.$$

迭代格式的第一和第二项如下:

$$\tilde{u}_0(t)=0,$$

$$\tilde{u}_1(t)=\begin{cases}-\frac{t^2}{2}+\frac{199t}{378}, & t\in[0,\frac{1}{3}],\\ -\frac{t^2}{2}+\frac{199t}{378}+\frac{1}{72}, & t\in[\frac{1}{2},1].\end{cases}$$

接下来, 我们计算第三项

对于 $t\in[0,\frac{1}{3}]$,

$$\tilde{u}_2(t)=\frac{175}{327}t^4-\frac{9950}{61803}t^3-\frac{t^2}{2}+\left(\frac{6720175}{70084602}+\frac{199}{378}\right)t.$$

对于 $t\in[\frac{1}{2},1]$,

$$\tilde{u}_2(t)=\frac{175}{327}t^4-\frac{9950}{61803}t^3-\frac{503t^2}{981}+\left(\frac{6720175}{70084602}+\frac{100097}{185409}\right)t.$$

例 6.5.2 令 $\mathbb{T}=\{0\}\bigcup\{1/3^n:\ n\in\ \mathbf{N_0}\}$. 考察如下 $\mathbb{T}$ 上的边值问题

$$u^{\Delta\nabla}+\sqrt{u(t)}=0,\quad t\in[0,1]_{\mathbf{T}},\tag{6.5.3}$$

$$u^{\Delta}(0)=0,\quad u(1)=\frac{1}{3}u(\frac{1}{9})+\frac{1}{9}u(\frac{1}{3}). \tag{6.5.4}$$

直接计算可得

$$d=\frac{5}{9},\ A'=\frac{9}{16},\ B'=\frac{81}{8},\ \Psi=\frac{5}{54}.$$

选取 $a=100,\ b=\frac{1}{1875}$, 易见非线性项 f 具有以下性质:

(a) $f:\ [0,1]_{\mathbb{T}}\times[0,+\infty)\longrightarrow[0,+\infty)$ 连续;

(b) 对于任意的 $t\in[0,1]_{\mathbb{T}}$ 和 $0\le u_1\le u_2\le 100$, 有 $f(t,u_1)\le f(t,u_2)$;

(c) $\max\{f(t,100):\ t\in[0,1]_{\mathbb{T}}\}=\sqrt{100}\le aA'=100\times\frac{9}{16}$,

$\min\{f(t,\Psi b):\ t\in[\xi_1,1]_{\mathbb{T}}\}=\sqrt{\frac{5}{54}\times\frac{1}{1875}}\ge bB'=\frac{1}{1875}\times\frac{81}{8}$.

借助于定理 6.3.1, 边值问题 (6.5.3) 与 (6.5.4) 至少有一个正解 u^* 使得 $\frac{1}{1875}\le\|u^*\|\le 100$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}T^n\tilde{u}=u^*$, 且 $\tilde{u}(t)\equiv 100,\ t\in[0,1]_{\mathbb{T}}$.

令 $u_0(t)\equiv 100,\ t\in[0,1]_{\mathbb{T}}$. 对于 $n=0,1,2,\cdots$, 我们有

$$\begin{aligned}u_{n+1}&=\int_0^1 G(t,s)f(s,u_n(s))\nabla s\\&=-\int_0^t(t-s)\sqrt{u_n(s)}\nabla s+\frac{9}{5}\int_0^1(1-s)\sqrt{u_n(s)}\nabla s\\&\quad-\frac{3}{5}\int_0^{\frac{1}{9}}\left(\frac{1}{9}-s\right)\sqrt{u_n(s)}\nabla s-\frac{1}{5}\int_0^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}-s\right)\sqrt{u_n(s)}\nabla s.\end{aligned}$$

注记 6.5.1 从应用的角度, 在寻求解存在的过程中, 我们提供了一种可计算的方法. 另一方面, 在例 6.5.2 中, 既然 $f(0)=0$, 其结论无法由定理 6.3.2 推出, 因此, 定理 6.3.1 和定理 6.3.2 互不包含.

第七章　一类 $\varphi-$ 凹算子及其应用

§7.1　引言

本节选自我们的工作 [151].

众所周知, 凹算子是一类重要的算子, 已被广泛地应用于非线性微分方程及差分方程研究中 [1-3, 12, 46, 47, 91, 152-157]). 在 [46] 中, M.A. Krasnoselskii 引入了许多关于凹算子的思想和结果. 有各种凹算子, 诸如 u_0- 凹算子 [91], 序凹算子 [34] 和 α- 凹算子 [47]. 应该指出的是 Liang, Wang 与 Li [152] 证明了序凹算子和 α- 凹算子都是 u_0- 凹算子, 并且给出了 u_0- 凹算子存在唯一不动点的充要条件. 进一步, Zhai, Yang 与 Guo [156] 考察了一类推广型的 α- 凹算子或齐次算子, 其结果改进了先前结论 (见 [47] 中的推论 3.3).

我们注意到李和梁 [57] 引入了 φ- 凹算子的概念, 提供了一种对上述算子进行统一处理的方法. 进而, [153, 154] 推广 φ- 凹算子的概念到 ϕ- 凹 $(-\psi)$ 凸算子上. 在 [157] 中, 赵减弱了一些条件 (如连续性) 且加强了一些结论. 近年来, 许多作者将目光集中在混合单调算子不动点的存在唯一性 [10, 11, 153-155, 158, 159, 163-168]. 在 [161] 中, Bhaskar 和 Lakshmikantham 建立了半序度量空间中混合单调算子的耦合不动点定理, 且用其讨论了一类周期边值问题的存在唯一性. 代替使用 [161] 的直接证明, Drici, McRae 与 Devi [11] 借用反射 (reflection) 算子的概念, 研究了混合单调算子不动点, 通过半序结构加强度量空间的性质而减弱对压缩假设的要求. Sintunavarat 与 Kumam [174] 推广 Bhaskar 和 Lakshmikantham [161] 的经典耦合不动点定理到满足一非计算型条件映射的耦合公共不动点定理. 进一步, Harjani, López 及 Sadarangani [165] 通过使用变化距离 (altering distance) 函数, 改进了 [11] 的结果. 在 [160] 中, 作者介绍了 W- 相容 (W-compatible) 映射的概念, 基于这一概念, 研究了映射 $F: X\times X\times X \longrightarrow X$ and $g: X\longrightarrow X$ 的三重合 (tripled coincidence) 点和公共三不动点, 此处 (X,d) 是锥度量空间. 我们应该指出的是, 其结果不依赖于锥的正规性.

另一方面, 带有凹凸性的混合单调算子的研究也受到关注 [153-155, 163, 164, 168, 171-173]. 在 [18] 中, Zhang 和 Wang 修正了 [171, 172] 的方法, 获得了混合单调算子正不动点的存在唯一性. 最近, 在 [170] 中, Zhai 和 Zhang 讨论了一类推广型的混合单调算子的不动点定理. 进而, 考察了其非线性特征值问题. 基于上述抽象结果, 建立了非线性 Neumann 边值问题, 三点边值问题与 Lane-Emden-Fowler

方程的椭圆边值问题的正解局部存在唯一性.

本章中, 借助于 φ- 凹算子的概念, 建立了带有凹性的混合单调算子的新的不动点定理. 所获得的抽象结果用于讨论一类 Hammerstein 型积分方程, 给出了其存在唯一解的新的充分条件.

§7.2 预备知识

一些定义与记号, 可参看 [1-3, 163].

定义 7.2.1([57]) $A: P_h \longrightarrow P_h$ 为 φ- 凹算子, 是指存在一函数 $\varphi: (0,1] \times P_h \longrightarrow (0,1]$ 使得 $t < \varphi(t,x)$, $t \in (0,1)$ 且 A 满足以下条件:

$$A(tx) \geq \varphi(t,x)Ax, \quad 0 < t \leq 1, \quad x \in P_h.$$

定义 7.2.2([175, 176]) 令 $D \subset E$, $A: D \longrightarrow E$ 是一算子. 则 S 是一推广型的凝聚算子, 是指对于任意的 $S \subset D$ 与 $\alpha(S) \neq 0$, 蕴含着 $\alpha(A(S)) < \alpha(S)$.

引理 7.2.1([175, 176]) 令 S, T 是 E 中的有界子集. 则
(i) $\alpha(S) = 0$ 当且仅当 S 相对紧;
(ii) $S \subset T$ 蕴含着 $\alpha(S) \leq \alpha(T)$;
(iii) $\alpha(\overline{S}) = \alpha(S)$;
(iv) $\alpha(S \cup T) = \max\{\alpha(S), \alpha(T)\}$;
(v) $\alpha(coS) = \alpha(S)$, 其中 coS 表示 S 的凸核.

§7.3 主要结果

定理 7.3.1 令 E 为 Banach 空间, 且 P 为 E 中的正规锥. 令 $u_0, v_0 \in E$ 满足 $u_0 \leq v_0$ 且 $A: [u_0, v_0] \times P \longrightarrow P$ 为混合单调算子. 对于固定的 $v \in P$, $A(\cdot, v): [u_0, v_0] \longrightarrow P$ 是 φ- 凹算子. 假设
(i) 存在一实正数 r_0, 使得 $u_0 \geq r_0 v_0$;
(ii) u_0 和 v_0 满足

$$u_0 \leq A(u_0, v_0), \quad A(v_0, u_0) \leq v_0;$$

(iii) 存在一元素 $w_0 \in [u_0, v_0]$, 使得

$$\varphi(t,x) \geq \varphi(t, w_0), \quad \forall\ (t,x) \in (0,1) \times [u_0, v_0],$$

且

$$\lim_{s\to t^-}\varphi(s,w_0)>t,\quad \forall\, t\in(0,1);$$

(iv) 对于固定的 $u\in[u_0,v_0]$, $\exists N>0$ 使得

$$A(u,\cdot):P\longrightarrow P,\ A(u,v_1)-A(u,v_2)\geq -N(v_1-v_2),\quad \forall\, v_1\geq v_2,\ v_1,v_2\in P.$$

则 A 在 $[u_0,v_0]$ 中有唯一解 x^*.

证明 我们将证明分为以下三步:

第一步: 证明对于任意给定的 $u\in[u_0,v_0]$, $A(u,\cdot)$ 有唯一的不动点 $T(u)\in[A(u_0,v_0),A(v_0,u_0)]$ 使得 $A(u,T(u))=T(u)$. 我们的证明同文 [18] 定理 2.1 中的证明相同, 完整起见, 我们列出其证明细节.

对于固定的 $u\in[u_0,v_0]$, 存在 $N>0$ 使得 $A(u,v)+Nv$ 关于 v 递增. 令

$$B(u,v)=\frac{A(u,v)+Nv}{N+1},$$

则 $B(u,v)=v$ 等价于 $A(u,v)=v$.

令 $x_0=A(u_0,v_0)$, $y_0=A(v_0,u_0)$, 与 $x_{n+1}=B(u,x_n)$, $y_{n+1}=B(u,y_n)$. 根据 $u_0\leq u\leq v_0$, $x_0=A(u_0,v_0)\leq v_0$, $u_0\leq v_0$ 及 $y_0=A(v_0,u_0)\geq u_0$, 我们有

$$A(u,x_0)\geq A(u_0,v_0)=x_0,$$

$$A(u,y_0)\leq A(v_0,u_0)=y_0,$$

这样

$$x_1=B(u,x_0)=\frac{A(u,x_0)+Nx_0}{N+1}\geq\frac{x_0+Nx_0}{N+1}=x_0,$$
$$y_1=B(u,y_0)=\frac{A(u,y_0)+Ny_0}{N+1}\leq\frac{y_0+Ny_0}{N+1}=y_0,$$

即 $x_0\leq x_1\leq y_1\leq y_0$. 由递推关系, 可得 $x_n\leq x_{n+1}\leq y_{n+1}\leq y_n$. 故有

$$\theta\leq y_n-x_n=\frac{A(u,y_{n-1})+Ny_{n-1}-A(u,x_{n-1})-Nx_{n-1}}{N+1}\leq\frac{N}{N+1}(y_{n-1}-x_{n-1}).$$

既然 P 是正规锥, 由递推关系可得

$$\|y_n-x_n\|\leq C\left(\frac{N}{N+1}\right)^n\|y_0-x_0\|,\tag{7.3.1}$$

其中 C 是 P 的正规常数.

进而 (对于任意的自然数 p)

$$x_{n+p} - x_n \leq y_{n+p} - x_n \leq y_n - x_n, \tag{7.3.2}$$

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leq C\|y_n - x_n\| \leq C^2 \left(\frac{N}{N+1}\right)^n \|y_0 - x_0\|, \tag{7.3.3}$$

这意味着 x_n 是一 Cauchy 列. 注意到 E 完备, 可知 x_n 收敛到某个元素, 我们用 $T(u)$ 表示. (7.3.1) 意味着 y_n 也收敛到 $T(u)$. 由

$$x_n \leq T(u) \leq y_n, \tag{7.3.4}$$

$$x_{n+1} = B(u, x_n) \leq B(u, T(u)) \leq B(u, y_n) \leq y_{n+1}, \tag{7.3.5}$$

使用 P 的正规性, 我们可推出 x_n, y_n 也收敛到 $B(u, T(u))$. 因此 $B(u, T(u)) = T(u)$.

若 $B(u, x) = x$, 则对于任意的正整数 n, 有 $x_n \leq x \leq y_n$, 两端取极限, 有 $x = T(u)$, 即 $T(u)$ 是 $A(u, \cdot)$ 在 $[A(u_0, v_0), A(v_0, u_0)]$ 中的唯一不动点.

第二步：证明: $T(u)$ 关于 u 递增.

若 $u, u' \in [u_0, v_0]$, $u \leq u'$, 则令 $x_0 = x_0' = A(u_0, v_0)$ 如第一步的定义. 既然 $B(u, v)$ 关于两个变量均增, 我们有

$$x_1 = B(u, x_0) \leq B(u', x_0') = x_1'.$$

递推可得 $x_n \leq x_n'$. 取极限, 我们有 $T(u) \leq T(u')$.

第三步：证明 $T(\cdot)$ 在 $[u_0, v_0]$ 中有一唯一不动点.

令 $u_{n+1} = T(u_n)$, $v_{n+1} = T(v_n)$, 有 $u_0 \leq u_1$, $v_1 \leq v_0$. 则由第二步的结论, 我们得到 $u_n \leq u_{n+1}$, $v_{n+1} \leq v_n$, 且 $u_n \leq v_n$. 由条件 (i), 有

$$\begin{aligned} u_1 &= A(u_0, T(u_0)) \\ &\geq A(r_0 v_0, T(u_0)) \\ &\geq \varphi(r_0, v_0) A(v_0, T(u_0)) \\ &\geq \varphi(r_0, v_0) A(v_0, T(v_0)) \\ &= \varphi(r_0, v_0) v_1, \end{aligned}$$

即

$$u_1 \geq \varphi(r_0, v_0) v_1,$$

令 $r_n=\varphi(r_{n-1},v_{n-1}),\quad n=1,2,\cdots$, 由递推, 可知

$$u_n\geq r_nv_n,\quad n=1,2,\cdots.$$

易见序列 $\{r_n\}$ 递增, 且 $\{r_n\}\subset(0,1]$. 设 $r_n\longrightarrow r(n\longrightarrow\infty)$, 则 $r=1$. 否则, 我们有 $0<r<1$. 由条件 (iii), 可得

$$r_n=\varphi(r_{n-1},v_{n-1})\geq\varphi(r_{n-1},w_0).\tag{7.3.6}$$

令 $n\longrightarrow\infty$, 有

$$r\geq\lim_{s\to r^-}\varphi(s,w_0)>r,$$

矛盾. 故 $r=1$.

因此, $\forall\ n,\ p\geq1$, 我们有

$$\theta\leq v_n-u_n\leq v_n-r_nv_n=(1-r_n)v_n\leq(1-r_n)v_0,$$

且

$$\theta\leq u_{n+p}-u_n\leq v_{n+p}-u_n\leq v_n-u_n,$$

$$\theta\leq v_n-v_{n+p}\leq v_n-u_{n+p}\leq v_n-u_n.$$

故由 P 的正规性, 易见 $v_n-u_n\longrightarrow0(n\longrightarrow\infty)$, 则 $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ 均为 Cauchy 列. 因此, 存在 u^*, v^*, 使得 $u_n\longrightarrow u^*$, $v_n\longrightarrow v^*(n\longrightarrow\infty)$ 且 $u^*=v^*$. 记 $x^*=u^*=v^*$.

接下来, 我们证明 $T(x^*)=x^*$. 易见

$$T(x^*)\geq T(u_n)=u_{n+1}\longrightarrow x^*,$$

则 $T(x^*)\geq x^*$. 另一方面, 我们有

$$T(x^*)\leq T(v_n)=v_{n+1}\longrightarrow x^*,$$

这样, 我们可得 $T(x^*)\leq x^*$. 因此 $T(x^*)=x^*$.

唯一性的证明同第一步. 最后, 从第一步可得 x^* 是 A 在 $[u_0,v_0]$ 中的不动点, 使得 $T(x^*)=x^*$ 且 $A(x^*,x^*)=x^*$.

若 $\overline{x}$ 满足 $A(\overline{x},\overline{x})=\overline{x}$. 由第一步 $T(\overline{x})$ 是 $A(\overline{x},\cdot)$ 的唯一不动点, 则 $T(\overline{x})=\overline{x}$. 根据 $T(\cdot)$ 的不动点的唯一性, 可得 $\overline{x}=x^*$. 这完成了定理 7.3.1 的证明.

注记 7.3.1 事实上, 由 [156] 的定理 2.3 与 [172] 中的定理 1.1, 我们可知定理 7.3.1 中的条件 $\lim\limits_{s\to t^-}\varphi(s,w_0)>t$ 可删去, 其结论仍成立.

定理 7.3.2 令 E 为实 Banach 空间, 且 P 是 E 中的一个锥. 令 $u_0, v_0 \in E$ 满足 $u_0 \leq v_0$ 且 $A : [u_0, v_0] \times P \longrightarrow P$ 是一推广型的凝聚和混合单调算子. 对于固定的 $v \in P$, $A(\cdot, v) : [u_0, v_0] \longrightarrow P$ 为 φ- 凹算子. 设定理 7.3.1 中的条件 (i)-(iv) 成立. 则 A 在 $[u_0, v_0]$ 中有唯一不动点 x^*.

证明 令 $S = \{x_n |\ n = 0, 1, 2, \cdots\}$. 我们证明 $S \subset co\{x_0, A([u_0, v_0] \times S)\}$. 易见 $x_0 \in co\{x_0, A([u_0, v_0] \times S)\}$. 若 $x_k \in co\{x_0, A([u_0, v_0] \times S)\}(k \geq 0)$, 则对于固定的 $u \in [u_0, v_0]$,

$$x_{k+1} = \frac{A(u, x_k) + Nx_k}{N+1} = \frac{A(u, x_k)}{N+1} + (1 - \frac{1}{N+1})x_k.$$

注意到 $A(u, x_k), x_k \in co\{x_0, A([u_0, v_0] \times S)\}$, 有 $x_{k+1} \in co\{x_0, A([u_0, v_0] \times S)\}$. 由递推式, 可得 $S \subset co\{x_0, A([u_0, v_0] \times S)\}$. 借助于引理 7.2.1, 可得

$$\alpha(S) \leq \alpha(co\{x_0, A([u_0, v_0] \times S)\}) = \alpha(A([u_0, v_0] \times S)) < \alpha(S)$$

矛盾. 据此可知 $\alpha(S) = 0$. 由引理 7.2.1, 我们有 $\overline{S}$ 是 E 中的紧集. 这意味着存在 $\{x_n\}$ 的一个子列 $\{x_{n_i}\}$ 收敛到 x^*, 且属于 E.

接下来, 我们证明 $\{x_n\}$ 其本身也收敛到 x^*. 否则, 存在 $\{x_n\}$ 另一子列 $\{x_{n_j}\}$ 收敛到另一点 $x_* \neq x^*(x_* \in E)$. 因此, 对于任意给定的 $\{x_{n_{i_0}}\}$, 若 n_j 充分大, 则 $x_{n_{i_0}} \leq x_{n_j}$. 令 $j \longrightarrow \infty$, 可得 $x_{n_{i_0}} \leq x_*$. 既然 $x_{n_{i_0}}$ 是 $\{x_{n_i}\}$ 中的任意给定的元素, 则对于 $\{x_{n_i}\}$ 中的任意元素 x_{n_i}, 我们有 $x_{n_i} \leq x_*$. 令 $n_i \longrightarrow \infty$, 有 $x^* \leq x_*$. 相似地, 我们可证明 $x_* \leq x^*$. 因此, $x_* = x^*$. 矛盾. 故 $x_n \longrightarrow x^*$. 以同样的方法, 我们可知存在 $y^* \in E$ 使得 $y_n \longrightarrow y^*$.

既然 $\theta \leq y_n - x_n \leq (\frac{N}{N+1})^n(y_0 - x_0)$, $n = 1, 2, 3, \cdots$. 令 $n \longrightarrow \infty$, 我们有 $y^* = x^*$.

接下来, 我们证明 x^* 是 A 的不动点. 事实上, 若 $m \geq 1$, 对于任意给定的正整数 n, $x_n \leq x_{n+m} \leq y_n$. 令 $m \longrightarrow \infty$, 有 $x_n \leq x^* \leq y_n$. 因此

$$\begin{aligned} A(u, x^*) &= A(u, x^*) - A(u, x_{n-1}) + A(u, x_{n-1}) \\ &\geq -N(x^* - x_{n-1}) + A(u, x_{n-1}) \\ &= -Nx^* + Nx_{n-1} + A(u, x_{n-1}) \\ &= -Nx^* + (N+1)x_n \longrightarrow x^*(n \longrightarrow \infty). \end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned} A(u,x^*) &= A(u,x^*)-A(u,y_{n-1})+A(u,y_{n-1}) \\ &\le -N(x^*-y_{n-1})+A(u,y_{n-1}) \\ &= -Nx^*+Ny_{n-1}+A(u,y_{n-1}) \\ &= -Nx^*+(N+1)y_n \longrightarrow x^*(n\longrightarrow\infty). \end{aligned}$$

因此, 对于固定的 $u\in[u_0,v_0]$, $A(u,x^*)=x^*$. 剩余的证明同定理 7.3.1.

推论 7.3.1 ([18] 中的定理 2.1) 令 P 是 E 中的正规锥, 且令 $A:P\times P\longrightarrow P$ 为混合单调算子. 设

1. 对于固定的 $v\in P$, $A(\cdot,v):P\longrightarrow P$ 是凹的; 对于固定的 $u\in P$, $\exists\, N>0$ 使得 $A(u,\cdot):P\longrightarrow P$, $A(u,v_1)-A(u,v_2)\ge -N(v_1-v_2)$, $\forall\, v_1\ge v_2$, v_1, $v_2\in P$.
2. $\exists\,\bar v>\theta$, $0<c\le 1$ 使得 $\theta<A(\bar v,\theta)\le\bar v$ 且

$$A(\theta,\bar v)\ge cA(\bar v,\theta).$$

则 A 在 $[\theta,\bar v]$ 中有唯一不动点 u^*, 且 $A(\theta,\bar v)\le u^*\le A(\bar v,\theta)$.

证明 令

$$u_n=A(u_{n-1},v_{n-1}),\quad v_n=A(v_{n-1},u_{n-1}),\quad n=1,2,\cdots,$$

$u_0=\theta$, $v_0=\bar v$, 易证

$$u_0<A(v_0,u_0)\le v_0,\quad A(u_0,v_0)\ge cA(v_0,u_0),$$

$$u_1\ge cv_1,\quad u_1=A(u_0,v_0)\le A(u_1,v_1),$$

$$A(v_1,u_1)\le v_1=A(v_0,u_0).$$

接下来, 让我们证明: 对于固定的 $v\in[u_1,v_1]$, $A(\cdot,v):[u_1,v_1]\longrightarrow P$ 为一 φ- 凹算子. 需证明 $A(\cdot,v):[u_0,v_0]\longrightarrow P$ 是一 φ- 凹算子, 对于固定的 $v\in[u_0,v_0]$.

对于每一个 $u\in[u_0,v_0]$, $t\in(0,1)$, 我们看到

$$\begin{aligned} A(tu,v) &= A(tu+(1-t)\theta,v) \\ &\ge tA(u,v)+(1-t)A(\theta,v) \\ &\ge tA(u,v)+(1-t)A(\theta,v_0) \\ &\ge tA(u,v)+c(1-t)A(v_0,u_0) \\ &\ge tA(u,v)+c(1-t)A(u,v). \end{aligned}$$

取 $\varphi(t,x)=t+c(1-t)$, 则 $\varphi:(0,1]\times[u_0,v_0]\longrightarrow(0,1]$, $\varphi(t,x)>t$, $\forall\ t\in(0,1)$, $\lim\limits_{s\to t^-}\varphi(s,w_0)=t+c(1-t)>t$. 由定理 7.3.1, 可知 A 在 $[u_1,v_1]$ 中有唯一的不动点 x^*.

相似地, 若 P 为一体锥, 我们有

推论 7.3.2 ([18] 中定理 2.3) 令 P 为 E 中的正规体锥, 且令 $A:P^\circ\times P^\circ\longrightarrow P^\circ$ 是混合单调算子; 假设
1. 对于固定的 $v\in P^\circ$, $A(\cdot,v):P^\circ\longrightarrow P^\circ$ 是凹的; 对于固定的 $u\in P^\circ$, $\exists\ N>0$ 使得 $A(u,\cdot):P^\circ\longrightarrow P^\circ$, $A(u,v_1)-A(u,v_2)\geq -N(v_1-v_2)$, $\forall\ v_1\geq v_2$, v_1, $v_2\in P^\circ$.
2. $\exists\ u_0\in P^\circ$, $v_0\in P^\circ$ 使得 $u_0\leq v_0$, $u_0\ll A(u_0,v_0)$, $A(v_0,u_0)\leq v_0$.
则 A 在 $[u_0,v_0]$ 中唯一不动点.

证明 易见存在一实数 $r_0>0$ 使得 $u_0\geq r_0v_0$. 既然 u_0, $v_0\in P^\circ$, 由推论 7.3.1 可得本结论.

推论 7.3.3 ([18] 中的注记 2.4) 令 P 是 E 中的正规体锥, 且令 $A:P^\circ\times P\longrightarrow P^\circ$ 为混合单调算子; 假设
1. 对于固定的 $v\in P$, $A(\cdot,v):P^\circ\longrightarrow P^\circ$ is α- 凹; 对于固定的 $u\in P$, $\exists\ N>0$ 使得 $A(u,\cdot):P\longrightarrow P$, $A(u,v_1)-A(u,v_2)\geq -N(v_1-v_2)$, $\forall\ v_1\geq v_2$, v_1, $v_2\in P$.
2. $\exists\ u_0\in P^\circ$, $v_0\in P^\circ$ 使得 $u_0\leq v_0$, $u_0\ll A(u_0,v_0)$, $A(v_0,u_0)\leq v_0$.
则 A 在 $[u_0,v_0]$ 中有唯一的不动点.

证明 取 $\varphi(t,x)=t^\alpha$, $\forall\ t\in(0,1)$. 则由推论 7.3.2, 可推出本结论.

推论 7.3.4 ([156] 中的定理 2.2 或 [169] 中的定理 2.1) 假设算子 A 满足以下条件:
(H_1) $A:P_h\longrightarrow P_h$ 在 P_h 上递减;
(H_2) 对于任意的 $x\in P_h$ 及 $t\in(0,1)$, 存在 $\alpha(t)\in(0,1)$ 使得

$$A(tx)\geq t^{\alpha(t)}Ax.$$

则 A 在 P_h 中有唯一解.

证明 若 $A(u,v)$ 与 v 无关, 取 $\varphi(t,x)=t^{\alpha(t)}$, $\forall\ t\in(0,1)$. 易于验证定理 7.3.1 中的条件 (i), (iii) 成立. 由 [156] 中的引理 2.1, 假设算子 A 满足条件 (H_1) 与 (H_2), 我们能知道存在 u_0, $v_0\in P_h$ 使得 $u_0<v_0$, $u_0\leq Au_0\leq Av_0\leq v_0$. 则定理 7.3.1 中的条件 (ii) 满足. 得证.

推论 7.3.5 ([169] 中的定理 2.6) 假设算子 A 满足以下条件:
(H_3) $A: P_h \longrightarrow P_h$ 在 P_h 上递增;
(H_4)

$$A(tx) \geq t^{\alpha(t,x)}Ax, \quad \forall\ x \in P_h, \quad t \in (0,1),$$

其中 $\alpha: (0,1) \times P_h \longrightarrow (0,1)$ 对于固定的 $t \in (0,1)$ 关于 x 递增.
(H_5) 存在 $t_0 \in (0,1)$ 使得

$$t_0 h \leq Ah \leq \frac{1}{t_0^{1-\alpha(t_0,\frac{1}{t_0}h)}}h.$$

则 A 在 P_h 中有唯一解.

证明 由推论 7.3.4, 我们仅需检验定理 7.3.1 中的条件 (ii). 据 [169] 中定理 2.6 的证明过程, 选取 $k \in R$ 使得 $k > \frac{1}{1-\alpha(t_0)}$. 设 $u_0 = t_0^k h$, $v_0 = \frac{1}{t_0^k}h$, 令

$$u_n = Au_{n-1}, \quad v_n = Av_{n-1}, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

我们有 u_0, $v_0 \in P_h$, $u_0 < v_0$, 及 $u_0 \leq Au_0 \leq Av_0 \leq v_0$.

进而, 我们易得以下新结果.

定理 7.3.3 令 P 为实 Banach 空间 E 中的正规锥, $e > \theta$ 且 $u_0, v_0 \in P$ 满足 $u_0 \leq v_0$ 且 $A: P \times P \longrightarrow P$ 是混合单调算子. 假设
(i) 存在一实正数 r_0 使得 $u_0 \geq r_0 v_0$;
(ii) $u_0 \leq A(u_0, v_0)$, $A(v_0, u_0) \leq v_0$;
(iii) 对于固定的 v, $A(\cdot, v): P \longrightarrow P$ 是 e- 凹的, 其特征函数 $\eta(t,x)$ 关于 x 单调, 且关于 t 左连续;
(iv) 对于固定的 $u \in P$, $\exists N > 0$ 使得

$$A(u,\cdot): P \longrightarrow P,\ A(u,v_1) - A(u,v_2) \geq -N(v_1 - v_2), \quad \forall\ v_1 \geq v_2,\ v_1, v_2 \in P.$$

则 A 在 $[u_0, v_0]$ 上有唯一不动点 x^*.

推论 7.3.6 ([156] 中的定理 2.5) 假设算子 A 满足以下条件:
(H_6) $A: P_h \longrightarrow P_h$ 在 P_h 上递增;
(H_7) 对于任意的 $x \in P_h$ 与 $t \in (0,1)$, 存在 $\eta(t) \in (0,1)$ 使得

$$A(tx) \geq t(1+\eta(t))Ax.$$

则 A 在 P_h 中唯一不动点.

证明 取 $\eta(t,x)=\eta(t)$, 由推论 7.3.4 和定理 7.3.3 即得.

§7.4 应用

例 7.4.1 考察以下非线性积分方程

$$x(t)=(Ax)(t)=\int_{R^N}K(t,s)[x^{\frac{1}{2}}(s)+x(s)+x^{-\frac{1}{3}}(s)]ds. \tag{7.4.1}$$

结论 7.4.1 假设 $K:R^N\times R^N\longrightarrow R^1$ 非负且连续, 满足

$$\frac{1}{111}\leq\int_{R^N}K(t,s)ds\leq\frac{1}{6}. \tag{7.4.2}$$

则方程 (7.4.1) 有唯一正解 $x^*(t)$ 满足 $10^{-2}\leq x^*(t)\leq 1$.

证明 我们使用定理 7.3.3 来证明结论 7.4.1. 令 $E=C_B(R^N)$ 表示在 R^N 上所有有界且连续函数集; 定义 $\|x\|=\sup_{t\in R^N}|x(t)|$, 则 E 是实 Banach 空间. 令 $P=C_B^+(R^N)$ 表示 $C_B(R^N)$ 的所有非负函数集. 则 P 是 E 的一正规锥. 易见方程 (7.4.1) 可改写为如下形式 $x=A(x,x)$, 其中

$$A(x,y)=A_1(x)+A_2(y),$$

$$A_1(x)=\int_{R^N}K(t,s)[x^{\frac{1}{2}}(s)+x(s)]ds,$$

$$A_2(y)=\int_{R^N}K(t,s)y^{-\frac{1}{3}}(s)ds.$$

接下来, 让我们证明算子 A 满足定理 7.3.3 的所有条件. 事实上, 取 $u_0=10^{-2}$, $v_0=1$. 易见 $A:P\times P\longrightarrow P$ 混合单调. 显然 u_0, $v_0\in P$, $u_0<v_0$ 且存在一实数 $\epsilon_0>0$ 使得 $u_0\geq\epsilon_0 v_0$. 由 (7.4.2), 可知

$$A(u_0,v_0)=\int_{R^N}K(t,s)(10^{-1}+10^{-2}+1)ds\geq 10^{-2}=u_0,$$

及

$$A(v_0,u_0)=\int_{R^N}K(t,s)(1+1+10^{\frac{2}{3}})ds\leq 1=v_0.$$

对于固定的 y, $\forall\, t \in (0,1)$, $\exists\, \eta = \eta(t,x) = \frac{(\sqrt{t}-t)\sqrt{x}}{t(\sqrt{x}+x)} > 0$ 使得

$$A(tx,y) \geq (1+\eta)tA(x,y),$$

其中 $\eta(t,x)$ 关于 x 递减, 且关于 t 左连续.

对于固定的 x, $\exists\, N = \frac{500}{9}$ 使得

$$A(x,v_1) - A(x,v_2) \geq -\frac{500}{9}(v_1 - v_2), \quad \forall\, v_1 \geq v_2, \quad v_1, v_2 \in [10^{-2}, 1].$$

因此, 借助于定理 7.3.3 可得推论 7.4.1.

第八章　时间尺度上非局部问题的可解性

§8.1　时间尺度上一类高阶三点边值问题的可解性

§8.1.1　引言

本节选自我们的工作 [177]. 考虑如下时间尺度上偶数阶三点边值问题 $\mathbb{T}$:

$$\begin{cases} (-1)^n y^{\Delta^{2n}}(t) = f(y^{\sigma}(t)), \quad t \in [a,b] \subset \mathbb{T}, \\ \alpha_{i+1} y^{\Delta^{2i}}(\eta) + \beta_{i+1} y^{\Delta^{2i+1}}(a) = y^{\Delta^{2i}}(a), \quad \gamma_{i+1} y^{\Delta^{2i}}(\eta) = y^{\Delta^{2i}}(\sigma(b)), \\ 0 \le i \le n-1, \end{cases} \tag{8.1.1.1}$$

与

$$\begin{cases} (-1)^n y^{\Delta^{2n}}(t) = f(t, y^{\sigma}(t)), \quad t \in [a,b] \subset \mathbb{T}, \\ \alpha_{i+1} y^{\Delta^{2i}}(\eta) + \beta_{i+1} y^{\Delta^{2i+1}}(a) = y^{\Delta^{2i}}(a), \quad \gamma_{i+1} y^{\Delta^{2i}}(\eta) = y^{\Delta^{2i}}(\sigma(b)), \\ 0 \le i \le n-1, \end{cases} \tag{8.1.1.2}$$

$n \ge 1$, $a < \eta < \sigma(b)$, 我们假定 $\sigma(b)$ 右稠密, 使得对于 $j \ge 1$, 有 $\sigma^j(b) = \sigma(b)$, 且对于每一个 $1 \le i \le n$, 系数 α_i, β_i, γ_i 满足以下条件:

$$(H)\ 0 \le \alpha_i < \frac{\sigma(b) - \gamma_i \eta + (\gamma_i - 1)(a - \beta_i)}{\sigma(b) - \eta},\ \beta_i \ge 0,\ 0 < \gamma_i < \frac{\sigma(b) - a + \beta_i}{\eta - a + \beta_i}.$$

近年来, 时间尺度上高阶两点边值问题正解的存在性受到了广泛的关注, 参见 [178-182] 及所附文献. 另一方面, 时间尺度上高阶多点边值问题 (包括三阶三点边值问题与偶数阶多点边值问题) 也获得了深入的研究 [183-189], 三阶方程出现于应用数学和物理学的诸多领域之中, 例如在量子流体和重力驱动流的研究中会用到此类方程 [183-186].

我们乐意提及 Anderson 和 Hoffacker [183], 韩与刘 [184] 以及 Anderson 和 Smyrlis [185] 的工作, 上述结果激发我们考察边值问题 (8.1.1.1) 与 (8.1.1.2). 在文献 [183] 中, Anderson 和 Hoffacker 考察了如下时间尺度上非线性三阶三点边值问题的解的存在性:

$$\begin{cases} (px^{\Delta\Delta})^{\nabla}(t) + a(t) f(x(t)) = 0, \quad t \in [t_1, t_3]_{\mathbb{T}}, \\ x(\rho(t_1)) = 0 = x^{\Delta}(\rho(t_1)), \quad x^{\Delta}(\sigma(t_3)) = \alpha x^{\Delta}(t_2). \end{cases} \tag{8.1.1.3}$$

通过计算相应的格林函数, 他们运用 Guo-Krasnosel'skii 不动点定理获得了 (8.1.1.3) 至少具有一个正解的存在性结果. 进一步, 他们考察了三阶多点特征值问题, 得到

了具有一个正解的存在性的特征值区间. 在文献 [184] 中, 韩和刘研究了以下时间尺度上带 p-Laplacian 算子的三阶 m- 点特征值问题:

$$\begin{cases} (\phi_p(u^{\Delta\nabla}))^{\nabla} + \lambda f(t, u(t), u^{\Delta}(t)) = 0, \quad t \in (0, T), \\ \alpha u(0) - \beta u^{\Delta}(0) = 0, \quad u(T) = \sum\limits_{i=1}^{m-2} a_i u(\xi_i), \quad u^{\Delta\nabla}(0) = 0, \end{cases} \tag{8.1.1.4}$$

在这里 $\phi_p(s)$ is p-Laplacian 算子, 即 $\phi_p(s) = |s|^{p-2}s$, $p > 1$, $\lambda > 0$ 是一个参数, $0 < \xi_1 < \cdots < \xi_{m-2} < \rho(T)$. 他们获得当 λ 属于某一区间时, 边值问题 (8.1.1.4) 非平凡解存在与唯一性的若干充分条件. 他们的方法基于 Leray-Schauder 非线性抉择. 我们注意到 Anderson 和 Smyrlis [185] 应用相似的方法来研究以下时间尺度上三阶三点边值问题:

$$\begin{cases} (px^{\Delta\Delta})^{\nabla}(t) + f(t, x(t), x^{\Delta}(t)) = 0, \quad t \in [t_1, t_3]_{\mathbb{T}}, \\ x(\rho(t_1)) = 0 = x^{\Delta}(\rho(t_1)), \quad x^{\Delta}(\sigma(t_3)) = \alpha x^{\Delta}(t_2). \end{cases} \tag{8.1.1.5}$$

他们也获得了边值问题 (8.1.1.5) 具有一个非平凡解的存在性的充分条件.

我们也乐意提及 Anderson 与 Avery [187], Anderson 与 Karaca [188] 及 Yaslan [189] 的工作. 在 [187] 中, Anderson 和 Avery 研究了如下偶数阶三点边值问题:

$$\begin{cases} (-1)^n x^{(\Delta\nabla)^n}(t) = \lambda h(t) f(x(t)), \quad t \in [a, c] \subset \mathbb{T}, \\ x^{(\Delta\nabla)^i}(a) = 0, \quad x^{(\Delta\nabla)^i}(c) = \beta x^{(\Delta\nabla)^i}(b), \quad 0 \le i \le n-1. \end{cases} \tag{8.1.1.6}$$

他们应用泛函型的锥拉伸与压缩不动点定理, 讨论了 (8.1.1.6) 至少存在一个正解的存在性定理.

在 [188] 中, Anderson 与 Karaca 考察了动力学三点边值问题 (8.1.1.2) 和带有相同边值条件的特征值问题 $(-1)^n y^{\Delta^{2n}}(t) = \lambda f(t, y^{\sigma}(t))$, 其中 λ 是一正常数. 作为 Schauder 不动点定理的应用, 获得了非特征值问题有界解的第一个存在性定理. 其次, 单调方法用于 (8.1.1.2). 再次, 通过使用 Krasnosel'skii 不动点定理, 他们建立了特征值问题至少存在一个正解的定理. 最后, 借助于 Avery-Henderson 不动点定理, 作者研究了 (8.1.1.2) 至少存在两个正解.

新近, Yaslan [189] 研究了如下时间尺度上非线性偶数阶三点边值问题解的存在性:

$$\begin{cases} (-1)^n y^{\Delta^{2n}}(t) = f(t, y(\sigma(t))), \quad t \in [t_1, t_3] \subset \mathbb{T}, \\ y^{\Delta^{2i+1}}(t_1) = 0, \quad \alpha y^{\Delta^{2i}}(\sigma(t_3)) + \beta y^{\Delta^{2i+1}}(\sigma(t_3)) = y^{\Delta^{2i+1}}(t_2), \end{cases} \tag{8.1.1.7}$$

$0 \le i \le n-1$, 其中 $\alpha > 0$ 且 $\beta > 1$ 为给定的常数. 一方面, 作者分别使用 Schauder 不动点定理和 Krasnosel'skii 不动点定理建立了 (8.1.1.7) 至少有一个解 (正解) 的存在性定理. 另一方面, 作者采用 Avery-Henderson 不动点定理及 Leggett-Williams 三解定理考察了 (8.1.1.7) 多重正解的存在性.

在本节中, 受文 [190] 的激发, 首先, 借助于一由 Krasnoselskii 与 Zabreiko [91] 获得的不动点定理, 建立了 (8.1.1.1) 解的存在性定理. 其次, 采用 Leray-Schauder 非线性抉择, 给出了 (8.1.1.2) 非负解存在性较简单的充分性条件. 第三, 研究了 (8.1.1.2) 非平凡解的存在性, 其方法基于 Leray-Schauder 非线性抉择. 特别地, 对于非线性项 f, 我们不需要任何单调性与非负性, 且给出的条件也易于验证. 方法来源于 [136, 190, 191, 192].

§8.1.2 预备知识

为了陈述和证明我们的主要结果, 需要以下引理.

引理 8.1.2.1([188]) 对于 $1 \le i \le n$, 令 $G_i(t,s)$ 为以下边值问题的 Green 函数

$$\begin{cases} -y^{\Delta^2}(t) = 0, \quad t \in [a,b] \subset \mathbf{T}, \\ \alpha_i y(\eta) + \beta_i y^{\Delta}(a) = y(a), \quad \gamma_i y(\eta) = y(\sigma(b)), \end{cases} \tag{8.1.2.1}$$

令 $d_i = (\gamma_i - 1)(a - \beta_i) + (1-\alpha_i)\sigma(b) + \eta(\alpha_i - \gamma_i)$. 则对于 $1 \le i \le n$,

$$G_i(t,s) = \begin{cases} G_{i_1}(t,s), \quad a \le s \le \eta, \\ G_{i_2}(t,s), \quad \eta < s \le b, \end{cases} \tag{8.1.2.2}$$

其中

$$G_{i_1}(t,s) = \frac{1}{d_i}\begin{cases} [\gamma_i(t-\eta) + \sigma(b) - t](\sigma(s) + \beta_i - a), \quad \sigma(s) \le t, \\ [\gamma_i(\sigma(s) - \eta) + \sigma(b) - \sigma(s)](t + \beta_i - a) + \alpha_i(\eta - \sigma(b))(t - \sigma(s)), \\ t \le s, \end{cases}$$

且

$$G_{i_2}(t,s) = \frac{1}{d_i}\begin{cases} [\sigma(s)(1-\alpha_i) + \alpha_i\eta + \beta_i - a](\sigma(b) - t) + \gamma_i(\eta - a + \beta_i)(t - \sigma(s)), \\ \quad \sigma(s) \le t, \\ [t(1-\alpha_i) + \alpha_i\eta + \beta_i - a](\sigma(b) - \sigma(s)), \quad t \le s. \end{cases}$$

引理 8.1.2.2([188]) 设 (H) 满足, 对于 $1 \le i \le n$ (8.1.2.2) 中的 Green 函数有以下性质:

$$G_i(t,s) > 0, \quad (t,s) \in (a, \sigma(b)) \times (a,b).$$

引理 8.1.2.3([188]) 设 (H) 满足. 则对于 $1 \le i \le n$, (8.1.2.2) 中的 Green 函数 $G_i(t,s)$ 满足以下性质

$$\begin{aligned} G_i(t,s) &\le \max\left\{G_i(a,s), G_i(\sigma(s),s), \tfrac{1}{d_i}(\eta - a + \beta_i)(\sigma(b)-\sigma(s))\right\}, \\ & t,s \in [a,\sigma(b)] \times [a,b],\ 0 < \gamma_i \le 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_i(t,s) &\le \max\left\{G_i(\sigma(b),s), G_i(\sigma(s),s)\right\}, \quad t,s \in [a,\sigma(b)] \times [a,b], \\ & 1 < \gamma_i < \tfrac{\sigma(b)-a+\beta_i}{\eta - a+\beta_i}. \end{aligned}$$

引理 8.1.2.4([188]) 假设条件 (H) 满足. 对于 (8.1.2.2) 中的 G_i, 取 $H_1(t,s) := G_1(t,s)$, 对于 $2 \le j \le n$, 且递推地定义

$$H_j(t,s) = \int_a^{\sigma(b)} H_{j-1}(t,r) G_j(r,s) \Delta r$$

则 $H_n(t,s)$ 为齐次问题

$$\begin{cases} (-1)^n y^{\Delta^{2n}}(t) = 0, \quad t \in [a,b] \subset \mathbf{T}, \\ \alpha_{i+1} y^{\Delta^{2i}}(\eta) + \beta_{i+1} y^{\Delta^{2i+1}}(a) = y^{\Delta^{2i}}(a), \quad \gamma_{i+1} y^{\Delta^{2i}}(\eta) = y^{\Delta^{2i}}(\sigma(b)), \\ 0 \le i \le n-1 \end{cases}$$

的 Green 函数.

引理 8.1.2.5([188]) 设 (H) 满足. 定义 $K = \prod_{j=1}^{n-1} K_j$, 则引理 8.1.2.4 中的 Green 函数 $H_n(t,s)$ 满足以下不等式

$$0 \le H_n(t,s) \le K \|G_n(\cdot,s)\|, \quad (t,s) \in [a,\sigma(b)] \times [a,b]$$

其中

$$K_j = \int_a^{\sigma(b)} \|G_j(\cdot,s)\| \Delta s > 0, \quad 1 \le j \le n. \tag{8.1.2.3}$$

引理 8.1.2.6([91]) 令 X 为一 Banach 空间, $F: X \longrightarrow X$ 全连续. 若存在一有界线性算子 $A: X \longrightarrow X$ 使得 1 不是 A 的一个特征值, 且

$$\lim_{\|u\| \to \infty} \frac{\|F(u) - A(u)\|}{\|u\|} = 0$$

则 F 在 X 中有一不动点.

引理 8.1.2.7([8]) 令 X 为一实 Banach 空间, Ω 是 X 中的一有界开子集, $\theta \in \Omega$, 且 $F : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ 为一全连续算子. 则或者存在 $x \in \partial\Omega$, $\lambda > 1$ 使得 $F(x) = \lambda x$, 或者存在一不动点 $x^* \in \overline{\Omega}$.

设 $\mathbf{B}$ 表示 Banach 空间 $C[a, \sigma(b)]$ 赋予范数 $\|y\| = \sup_{t\in[a,\sigma(b)]} |y(t)|$.

§8.1.3 存在性定理

在本部分, 我们应用引理 8.1.2.6 和 8.1.2.7 建立 (8.1.1.1) 与 (8.1.1.2) 解的若干存在性定理.

定理 8.1.3.1 假设条件 (H) 满足, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 连续, 且 $\lim_{s\to\infty} \frac{f(s)}{s} = m$. 若

$$|m| < d = \left[\prod_{j=1}^{n} K_j\right]^{-1},$$

则边值问题 (8.1.1.1) 有一个解 y^*, 且当 $f(0) \neq 0$ 时, 有 $y^* \neq 0$.

证明 对于 $t \in [a, \sigma(b)]$, 定义积分算子 $F : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{B}$ 如下

$$Fy(t) = \int_a^{\sigma(b)} H_n(t, s) f(y^\sigma(s))\Delta s,$$

易见边值问题 (8.1.1.1) 的解等价于算子 F 的不动点. 由 [188] 中定理 3.1 的证明可知 $F : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{B}$ 全连续.

为了应用引理 8.1.2.6, 我们考虑以下边值问题:

$$\begin{cases} (-1)^n y^{\Delta^{2n}}(t) = m y^\sigma(t), \quad t \in [a, b] \subset \mathbf{T}, \\ \alpha_{i+1} y^{\Delta^{2i}}(\eta) + \beta_{i+1} y^{\Delta^{2i+1}}(a) = y^{\Delta^{2i}}(a), \quad \gamma_{i+1} y^{\Delta^{2i}}(\eta) = y^{\Delta^{2i}}(\sigma(b)), \\ 0 \le i \le n-1. \end{cases} \tag{8.1.3.1}$$

定义积分算子 $A : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{B}$ 如下:

$$Ay(t) = m \int_a^{\sigma(b)} H_n(t, s) y^\sigma(s)\Delta s,$$

此时 $t \in [a, \sigma(b)]$. 则易于检验 $A : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{B}$ 为全连续线性算子, 且边值问题 (8.1.3.1) 的解等价于算子 A 的不动点.

首先, 我们断言 1 不是 A 的一个特征值.

事实上, 若 $m=0$, 则易见边值问题 (8.1.3.1) 没有非平凡解.

若 $m\neq 0$ 且边值问题 (8.1.3.1) 有一个非平凡解 y, 则 $\|y\|>0$, 且

$$\begin{aligned}
\|y\| &= \|Ay\| \\
&= \sup_{t\in[a,\sigma(b)]}\left|m\int_a^{\sigma(b)} H_n(t,s)y^\sigma(s)\Delta s\right| \\
&= |m|\sup_{t\in[a,\sigma(b)]}\left|\int_a^{\sigma(b)} H_n(t,s)y^\sigma(s)\Delta s\right| \\
&\le |m|\int_a^{\sigma(b)} K\|G_n(\cdot,s)\||y^\sigma(s)|\Delta s \\
&\le |m|(\textstyle\prod_{j=1}^n K_j)\|y\| \\
&< d\cdot\frac{1}{d}\|y\| = \|y\|,
\end{aligned}$$

矛盾. 因此, 1 不是 A 的一个特征值.

接下来, 我们证明

$$\lim_{\|y\|\to\infty}\frac{\|F(y)-A(y)\|}{\|y\|}=0.$$

事实上, 对于任意给定的 $\epsilon>0$, 既然 $\lim\limits_{s\to\infty}\dfrac{f(s)}{s}=m$, 必存在一数 $Y_1>0$ 使得

$$|f(s)-ms|<\epsilon|s|,\quad |s|>Y_1. \tag{8.1.3.2}$$

令

$$M=\max_{|s|\le Y_1}|f(s)|.$$

则对于任意给定的 $y\in\mathbf{B}$ 与 $\|y\|>Y$ $(Y>0)$, 我们分以下两种情形证明:

情形 1: $Y<Y_1$. 在此之下, 选取 Y 使得

$$\frac{M+|m|Y_1}{Y}<\epsilon.$$

则当 $s\in[a,\sigma(b)]$ 且 $|y^\sigma(s)|\le Y_1$, 有

$$|f(y^\sigma(s))-my^\sigma(s)|\le|f(y^\sigma(s))|+|m||y^\sigma(s)|\le M+|m|Y_1<\epsilon Y<\epsilon\|y\|,$$

结合 (8.1.3.2), 可得

$$|f(y^\sigma(s))-my^\sigma(s)|<\epsilon\|y\|,\quad \|y\|>Y; \tag{8.1.3.3}$$

情形 2：$Y \geq Y_1$. 在此之下, 当 $s \in [a, \sigma(b)]$, 由 (8.1.3.2), 我们看到

$$|f(y^\sigma(s)) - my^\sigma(s)| < \epsilon |y^\sigma(s)| \leq \epsilon \|y\|. \quad (8.1.3.4)$$

故从 (8.1.3.3) 与 (8.1.3.3), 可推出: 对于任意给定的 $y \in \mathbf{B}$ 与 $\|y\| > Y$, 有

$$|f(y^\sigma(s)) - my^\sigma(s)| < \epsilon \|y\|, \quad \forall s \in [a, \sigma(b)]. \quad (8.1.3.5)$$

从 (8.1.3.5) 可知

$$\begin{aligned} \|F(y) - A(y)\| &= \sup_{t \in [a, \sigma(b)]} \left| \int_a^{\sigma(b)} H_n(t,s)[f(y^\sigma(s)) - my^\sigma(s)]\Delta s \right| \\ &\leq \sup_{t \in [a, \sigma(b)]} \int_a^{\sigma(b)} H_n(t,s)|f(y^\sigma(s)) - my^\sigma(s)|\Delta s \\ &\leq \epsilon \|y\| (\textstyle\prod_{j=1}^n K_j) \\ &= \frac{\epsilon}{d} \|y\|. \end{aligned}$$

即

$$\lim_{\|y\| \to \infty} \frac{\|F(y) - A(y)\|}{\|y\|} = 0.$$

因此, 由引理 8.1.2.6, 可得 F 有一不动点 $y^* \in \mathbf{B}$. 换言之, y^* 是边值问题 (8.1.1.1) 的解. 进一步, 我们可断言当 $f(0) \neq 0$ 时 y^* 是非平凡的. 事实上, 若 $f(0) \neq 0$, 则

$$(-1)^n (0)^{\Delta^{2n}} = 0 \neq f(0),$$

即 0 不是边值问题 (8.1.1.1) 的解.

推论 8.1.3.1 设条件 (H) 满足, $f : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ 连续且 $\lim_{s \to +\infty} \frac{f(s)}{s} = 0$. 则边值问题 (8.1.1.1) 有一非负解.

证明 令

$$f^*(s) = \begin{cases} f(s), & s \geq 0, \\ f(-s), & s < 0, \end{cases}$$

则 $f^* : \mathbf{R} \longrightarrow [0, +\infty)$ 连续, 且从 $\lim_{s \to +\infty} \frac{f(s)}{s} = 0$ 可知

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{f^*(s)}{s} = 0.$$

考虑以下边值问题:

$$\begin{cases} (-1)^n y^{\Delta^{2n}}(t) = f^*(y^\sigma(t)), \quad t \in [a,b] \subset \mathbb{T}, \\ \alpha_{i+1} y^{\Delta^{2i}}(\eta) + \beta_{i+1} y^{\Delta^{2i+1}}(a) = y^{\Delta^{2i}}(a), \quad \gamma_{i+1} y^{\Delta^{2i}}(\eta) = y^{\Delta^{2i}}(\sigma(b)), \\ 0 \le i \le n-1. \end{cases} \tag{8.1.3.6}$$

根据定理 8.1.3.1 可得, 边值问题 (8.1.3.6) 有一个解 y^*, 即

$$\begin{cases} (-1)^n (y^*)^{\Delta^{2n}}(t) = f^*((y^*)^\sigma(t)), \quad t \in [a,b] \subset \mathbb{T}, \\ \alpha_{i+1} (y^*)^{\Delta^{2i}}(\eta) + \beta_{i+1} (y^*)^{\Delta^{2i+1}}(a) = (y^*)^{\Delta^{2i}}(a), \quad \gamma_{i+1} (y^*)^{\Delta^{2i}}(\eta) = (y^*)^{\Delta^{2i}}(\sigma(b)), \\ 0 \le i \le n-1. \end{cases} \tag{8.1.3.7}$$

既然 $H_n(t,s)$ 和 f^* 均非负, 我们可知在 $[a,\sigma(b)]$ 上 $y^* \ge 0$. 因此, 由 f^* 的定义, 可得

$$(-1)^n (y^*)^{\Delta^{2n}}(t) = f((y^*)^\sigma(t)), \quad t \in [a,b] \subset \mathbb{T}. \tag{8.1.3.8}$$

从 (8.1.3.7) 与 (8.1.3.8) 的边值条件可知 y^* 是边值问题 (8.1.1.1) 的非负解.

注记 8.1.3.1 在推论 8.1.3.1 中, 我们仅需 $\lim\limits_{s\to+\infty} \frac{f(s)}{s} = 0$.

定理 8.1.3.2 假设条件 (H) 满足,

$$\begin{aligned} &f : [a,\sigma(b)] \times [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty) \text{ 连续} \\ &\text{对于 } (t,u) \in [a,\sigma(b)] \times (0,+\infty), \text{有 } f(t,u) > 0, \end{aligned} \tag{8.1.3.9}$$

$$\begin{aligned} &\text{在 } [a,\sigma(b)] \times [0,+\infty) \text{ 上, 有 } f(t,u) \le \varphi(t) g(u), \text{其中} \\ &g \ge 0 \text{ 在 } [0,+\infty) \text{ 上连续非减, 进而 } \varphi : [a,\sigma(b)] \longrightarrow (0,\infty) \text{ 连续, 且} \end{aligned} \tag{8.1.3.10}$$

$$\exists\, r > 0 \text{ 使得 } r > g(\|r\|) \int_a^{\sigma(b)} \varphi(s) K \|G_n(\cdot,s)\| \Delta s, \tag{8.1.3.11}$$

其中 K 与 $G_n(\cdot,s)$ 分别由引理 8.1.2.5 与引理 8.1.2.1 给出. 则边值问题 (8.1.1.2) 有一非负解 y_1 满足 $\|y_1\| < r$.

证明 我们考虑以下边值问题

$$\begin{cases} (-1)^n y^{\Delta^{2n}}(t) = \lambda f^*(t, y^\sigma(t)), \quad t \in [a,b] \subset \mathbb{T}, \\ \alpha_{i+1} y^{\Delta^{2i}}(\eta) + \beta_{i+1} y^{\Delta^{2i+1}}(a) = y^{\Delta^{2i}}(a), \quad \gamma_{i+1} y^{\Delta^{2i}}(\eta) = y^{\Delta^{2i}}(\sigma(b)), \\ 0 \le i \le n-1. \end{cases} \tag{8.1.3.12}$$

其中 $0<\lambda<1$, 且

$$f^*(t,u)=\begin{cases} f(t,u), & u\geq 0,\\ f(t,0), & u<0.\end{cases}$$

令 y 为 (8.1.3.12) 的任一解. 则对于 $t\in[a,\sigma(b)]$, 有

$$y(t)=\lambda\int_a^{\sigma(b)} H_n(t,s)f^*(s,y^\sigma(s))\Delta s.$$

注意到 $y(t)\geq 0$ 对于 $t\in[a,\sigma(b)]$ 成立. 根据定理 8.1.3.2 中的条件 (8.1.3.10), 可知对于 $t\in[a,\sigma(b)]$

$$\begin{aligned} y(t) &\leq \int_a^{\sigma(b)} H_n(t,s)\varphi(s)g(|y^\sigma(s)|)\Delta s\\ &\leq g(\|y\|)\int_a^{\sigma(b)} \varphi(s)K\|G_n(\cdot,s)\|\Delta s. \end{aligned}$$

故

$$\|y\|\leq g(\|y\|)\int_a^{\sigma(b)} \varphi(s)K\|G_n(\cdot,s)\|\Delta s, \tag{8.1.3.13}$$

结合定理 8.1.3.2 中的条件 (8.1.3.11), 有 $\|y\|\neq r$.

令 $N:\mathbf{B}\longrightarrow\mathbf{B}$ 如下定义

$$Ny(t)=\int_a^{\sigma(b)} H_n(t,s)f^*(s,y^\sigma(s))\Delta s.$$

易见 $N:\mathbf{B}\longrightarrow\mathbf{B}$ 全连续.

令

$$U=\{u\in\ \mathbf{B}:\|u\|<r\}.$$

既然 $\|y\|\neq r$, $y=\lambda Ny$ 的每一个解 $y\in\partial U$ 满足 $0<\lambda<1$ 不会发生. 引理 8.1.2.7 确保 N 在 $\overline{U}$ 中有一不动点 y_1. 换言之, 边值问题 (8.1.1.2) 有一个解 $y_1\in\mathbf{B}$ 满足 $\|y_1\|<r$.

定理 8.1.3.3 假设条件 (H) 满足. 设 $f(t,0)\not\equiv 0$, $t\in[a,\sigma(b)]$, $f:[a,\sigma(b)]\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{T}$ 连续, 且存在非负可积函数 k, h 使得

$$|f(t,y)|\leq k(t)|y|+h(t),\qquad (t,y)\in[a,\sigma(b)]\times\mathbb{R},$$

$$K\int_a^{\sigma(b)} \|G_n(\cdot,s)\|k(s)\Delta s<1.$$

则边值问题 (8.1.1.2) 至少有一个平凡解 $y^* \in \mathbf{B}$.

证明 令

$$A = K\int_a^{\sigma(b)} \|G_n(\cdot, s)\| h(s)\Delta s,$$

$$B = K\int_a^{\sigma(b)} \|G_n(\cdot, s)\| k(s)\Delta s.$$

由假设 $B < 1$, 既然 $f(t, 0) \not\equiv 0$, 存在 $[m, n] \subset [a, \sigma(b)]$ 使得 $\min\limits_{t\in[m,n]} |f(t, 0)| > 0$. 另一方面, 从条件 $h(t) \geq |f(t, 0)|$, $t \in [a, \sigma(b)]$, 我们可知 $A > 0$.

令 $d = A(1 - B)^{-1}$, $\Omega_d = \{y \in \mathbf{B} : \|y\| < d\}$. 对于 $t \in [a, \sigma(b)]$, 算子 T 定义如下

$$Ty(t) = \int_a^{\sigma(b)} H_n(t, s)f(s, y^\sigma(s))\Delta s,$$

由定理 8.1.3.1 和定理 8.1.3.2, 可知 $T : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{B}$ 全连续, 且边值问题 (8.1.1.2) 至少有一个非平凡解 $y^* \in \mathbf{B}$ 当且仅当 y^* 是 T 在 $\mathbf{B}$ 中的不动点.

假定 $y \in \partial\Omega_d$, $\lambda > 1$ 使得 $Ty = \lambda y$, 则

$$\begin{aligned}
\lambda d &= \lambda\|y\| = \|Ty\| = \sup_{t\in[a,\sigma(b)]} |Ty(t)| \\
&= \sup_{t\in[a,\sigma(b)]} \left| \int_a^{\sigma(b)} H_n(t, s)f(s, y^\sigma(s))\Delta s \right| \\
&\leq K\int_a^{\sigma(b)} \|G_n(\cdot, s)\| |f(s, y^\sigma(s))| \Delta s \\
&\leq K\int_a^{\sigma(b)} \|G_n(\cdot, s)\| [k(s)|y^\sigma(s)| + h(s)]\Delta s \\
&= K\int_a^{\sigma(b)} \|G_n(\cdot, s)\| k(s)|y^\sigma(s)|\Delta s + K\int_a^{\sigma(b)} \|G_n(\cdot, s)\| h(s)\Delta s \\
&\leq B\|y\| + A = Bd + A.
\end{aligned}$$

因此

$$(\lambda - 1)d \leq A - (1 - B)d = A - A = 0,$$

这与 $\lambda > 1$ 矛盾. 根据引理 8.1.2.7, T 有一不动点 $y^* \in \overline{\Omega}_d$. 注意到 $f(t, 0) \not\equiv 0$, 故边值问题 (8.1.1.2) 至少有一个非平凡解 $y^* \in \mathbf{B}$.

推论 8.1.3.3 假定条件 (H) 满足. 设 $f(t,0)\not\equiv 0,\ t\in[a,\sigma(b)],\ f:[a,\sigma(b)]\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 连续, 且存在非负可积函数 $k,\ h$ 使得

$$|f(t,y)|\le k(t)|y|+h(t),\qquad (t,y)\in[a,\sigma(b)]\times\mathbb{R},$$

$$k(t)<e=\left[\prod_{j=1}^{n}K_j\right]^{-1},\quad t\in[a,\sigma(b)].$$

则边值问题 (8.1.1.2) 至少有一个非平凡解 $y^*\in\mathbf{B}$.

证明 此种情形下, 我们有

$$\begin{aligned}K\int_a^{\sigma(b)}\|G_n(\cdot,s)\|k(s)\Delta s\ &<Ke\int_a^{\sigma(b)}\|G_n(\cdot,s)\|\Delta s\\&=K\left[\prod_{j=1}^{n}K_j\right]^{-1}\int_a^{\sigma(b)}\|G_n(\cdot,s)\|\Delta s=1.\end{aligned}$$

由定理 8.1.3.2 即得.

推论 8.1.3.4 假定条件 (H) 满足. 设 $f(t,0)\not\equiv 0,\ t\in[a,\sigma(b)],\ f:[a,\sigma(b)]\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 连续, 且存在非负可积函数 $k,\ h$ 使得

$$|f(t,y)|\le k(t)|y|+h(t),\qquad (t,y)\in[a,\sigma(b)]\times\mathbb{R},$$

$$\overline{\lim_{|l|\to\infty}}\max_{t\in[a,\sigma(b)]}\left|\frac{f(t,l)}{l}\right|<\left[\prod_{j=1}^{n}K_j\right]^{-1}.$$

则边值问题 (8.1.1.2) 至少有一个非平凡解 $y^*\in\mathbf{B}$.

证明 令

$$\epsilon=\frac{1}{2}\left[\left(\prod_{j=1}^{n}K_j\right)^{-1}-\overline{\lim_{|l|\to\infty}}\max_{t\in[a,\sigma(b)]}\left|\frac{f(t,l)}{l}\right|\right],$$

则, 存在 $c>0$ 使得

$$|f(t,l)|\le\left[\left(\prod_{j=1}^{n}K_j\right)^{-1}-\epsilon\right]|l|,\quad (t,l)\in[a,\sigma(b)]\times\mathbb{R}\setminus(-c,c).\qquad(8.1.3.13)$$

取

$$\tilde{M}=\max\{f(t,l)|(t,l)\in[a,\sigma(b)]\times[-c,c]\},\qquad(8.1.3.14)$$

由 (8.1.3.13) 和 (8.1.3.14) 可得

$$|f(t,l)| \le \left[\left(\prod_{j=1}^{n} K_j\right)^{-1} - \epsilon\right] |l| + \tilde{M}, \quad (t,l) \in [a, \sigma(b)] \times \mathbb{R}.$$

根据推论 8.1.3.3, 可推出推论 8.1.3.4 成立.

§8.1.4　两个例子

例 8.1.4.1 令 $\mathbb{T} = \mathbb{R}[0,1) \bigcup \{1,2,3,4,5\} \bigcup [6,7]$, 考虑以下边值问题

$$\begin{cases} -y^{\Delta^2}(t) = f(y^{\sigma}(t)), \quad t \in [0,5] \subset \mathbf{T}, \\ \frac{3}{5}y(\frac{2}{3}) + \frac{2}{3}y^{\Delta}(0) = y(0), \quad \frac{1}{6}y(\frac{2}{3}) = y(\sigma(5)), \end{cases} \tag{8.1.4.1}$$

其中 $f(y) = \dfrac{17737}{89902}y + \dfrac{1}{101}$. 易于检验

$$0 < \frac{3}{5} = \alpha_1 < \frac{\sigma(b) - \gamma_1\eta + (\gamma_1 - 1)(a - \beta_1)}{\sigma(b) - \eta} = \frac{6 - \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3} + (\frac{1}{6} - 1)(0 - \frac{2}{3})}{6 - \frac{2}{3}} = \frac{29}{24},$$

$$\beta_1 = \frac{2}{3} > 0, \quad 0 < \frac{1}{6} = \gamma_1 < \frac{\sigma(b) - a + \beta_1}{\eta - a + \beta_1} = \frac{6 - 1 + \frac{2}{3}}{\frac{2}{3} - 0 + \frac{2}{3}} = 5.$$

因此, 条件 (H) 满足. 通过直接计算, 有

$$d_1 = (\gamma_1 - 1)(a - \beta_1) + (1 - \alpha_1)\sigma(b) + \eta(\alpha_1 - \gamma_1) = \frac{146}{45},$$

$$G_1(t,s) = \begin{cases} G_{1_1}(t,s), & 0 \le s \le \frac{2}{3}, \\ G_{1_2}(t,s), & \frac{2}{3} < s \le 5, \end{cases}$$

其中

$$G_{1_1}(t,s) = \frac{45}{146}\begin{cases} [\frac{1}{6}(t - \frac{2}{3}) + \sigma(5) - t](\sigma(s) + \frac{2}{3}), \quad \sigma(s) \le t, \\ [\frac{1}{6}(\sigma(s) - \frac{2}{3}) + 6 - \sigma(s)](t + \frac{2}{3}) + \frac{3}{5}(\frac{2}{3} - 6)(t - \sigma(s)), \\ \qquad t \le s, \end{cases}$$

$$G_{1_2}(t,s) = \frac{45}{146}\begin{cases} [\sigma(s)(1 - \frac{3}{5}) + \frac{3}{5} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3}](6 - t) + \frac{1}{6}(\frac{2}{3} + \frac{2}{3})(t - \sigma(s)), \\ \quad \sigma(s) \le t, \\ [t(1 - \frac{3}{5}) + \frac{3}{5} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3}](6 - \sigma(s)), \quad t \le s. \end{cases}$$

从 [188] 中引理 2.5 的证明可知

$$\begin{aligned}\|G_1(\cdot,s)\| &= \max\left\{G_1(0,s), G_1(\sigma(s),s), \tfrac{1}{d_1}(\eta-a+\beta_1)(\sigma(b)-\sigma(s))\right\}\\ &= G_1(\sigma(s),s),\end{aligned}$$

对于 $\gamma_1=\frac{1}{6}\in(0,1]$ 与 $\alpha_1=\frac{3}{5}\in(0,1)$, 我们有

$$\begin{aligned}K_1 &= \tfrac{45}{146}\int_0^{\frac{2}{3}}\left[\frac{1}{6}\left(s-\frac{2}{3}\right)+6-s\right](s+\frac{2}{3}-0)ds\\ &+\tfrac{45}{146}\int_{\frac{2}{3}}^{1}\left[s\left(1-\frac{3}{5}\right)+\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-0\right](6-s)ds\\ &+\sum_{s=1}^{5}\tfrac{45}{146}\left[(s+1)(1-\tfrac{3}{5})+\tfrac{3}{5}\times\tfrac{2}{3}+\tfrac{2}{3}\right][6-(s+1)]\\ &= \tfrac{89902}{17739}.\end{aligned}$$

故我们可得

$$\lim_{y\to\infty}\frac{f(y)}{y}=\lim_{y\to\infty}\frac{\frac{17737}{89902}y+\frac{1}{101}}{y}=\frac{17737}{89902}<d=K_1^{-1}=\frac{17739}{89902}.$$

由定理 8.1.3.1, 易得边值问题 (8.1.4.1) 有一个正解 y^*.

例 8.1.4.2 令 $n=2$, $\mathbb{T}=\{(\frac{2}{3})^n: n\in\mathbb{N}_0\}\bigcup\{0\}\bigcup[1,2]$, $a=\frac{8}{27}$, $\eta=\frac{4}{9}$, $b=\frac{2}{3}$, $\alpha_1=\frac{1}{2}$, $\beta_1=\frac{1}{9}$, $\alpha_2=\frac{1}{10}$, $\beta_2=\frac{7}{27}$, $\gamma_1=\frac{3}{2}$, $\gamma_2=2$. 则条件 (H) 满足. 引理 8.1.2.1 中的 Green 函数 $G_1(t,s)$ 为

$$G_1(t,s)=\begin{cases}G_{1_1}(t,s), & \frac{8}{27}\le s\le\frac{4}{9},\\ G_{1_2}(t,s), & \frac{4}{9}<s\le\frac{2}{3},\end{cases}$$

其中

$$G_{1_1}(t,s)=\frac{27}{4}\begin{cases}[\frac{3}{2}(t-\frac{4}{9})+1-t][\frac{3}{2}s+\frac{1}{9}-\frac{8}{27}], & \frac{3}{2}s\le t,\\ \left[\frac{3}{2}(\frac{3}{2}s-\frac{4}{9})+1-\frac{3}{2}s\right]\left(t+\frac{1}{9}-\frac{8}{27}\right)+\frac{1}{2}(\frac{4}{9}-1)(t-\frac{3}{2}s), & t\le s,\end{cases}$$

$$G_{1_2}(t,s)=\frac{27}{4}\begin{cases}\left[\frac{3}{2}s(1-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}\times\frac{4}{9}+\frac{1}{9}-\frac{8}{27}\right](1-t)+\frac{3}{2}\left(\frac{4}{9}-\frac{8}{27}+\frac{1}{9}\right)(t-\frac{3}{2}s),\\ \quad\frac{3}{2}s\le t,\\ \left[t(1-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}\times\frac{4}{9}+\frac{1}{9}-\frac{8}{27}\right](1-\frac{3}{2}s), & t\le s.\end{cases}$$

引理 8.1.2.1 中的 Green 函数 $G_2(t,s)$ 为

$$G_2(t,s)=\begin{cases} G_{2_1}(t,s), & \frac{8}{27}\le s\le\frac{4}{9}, \\ G_{2_2}(t,s), & \frac{4}{9}< s\le\frac{2}{3}, \end{cases}$$

其中

$$G_{2_1}(t,s)=\frac{54}{5}\begin{cases} [2(t-\frac{4}{9})+1-t][\frac{3}{2}s+\frac{7}{27}-\frac{8}{27}], & \frac{3}{2}s\le t, \\ \left[2(\frac{3}{2}s-\frac{4}{9})+1-\frac{3}{2}s\right]\left(t+\frac{7}{27}-\frac{8}{27}\right)+\frac{1}{10}(\frac{4}{9}-1)(t-\frac{3}{2}s), & t\le s, \end{cases}$$

$$G_{2_2}(t,s)=\frac{54}{4}\begin{cases} \left[\frac{3}{2}s(1-\frac{1}{10})+\frac{1}{10}\cdot\frac{4}{9}+\frac{7}{27}-\frac{8}{27}\right](1-t)+2\left(\frac{4}{9}-\frac{8}{27}+\frac{7}{27}\right)(t-\frac{3}{2}s), \\ \quad \frac{3}{2}s\le t, \\ \left[t(1-\frac{1}{10})+\frac{1}{10}\cdot\frac{4}{9}+\frac{7}{27}-\frac{8}{27}\right](1-\frac{3}{2}s), \quad t\le s. \end{cases}$$

既然 $s\in\left[a,\dfrac{\gamma_1(\eta-a+\beta_1)-\alpha_1\eta-\beta_1+a}{1-\alpha_1}\right)=\left[\frac{8}{27},\frac{19}{27}\right)$, 由 [188] 中引理 2.5 的证明过程可得 $\|G_1(\cdot,s)\|=G_1(\sigma(\frac{2}{3}),s)$. 因此, 我们有 $K_1=\frac{133}{324}$.

取 $f(t,y)=t|y|\sin y+t^3-2\sin t,\ k(t)=t,\ h(t)=t^3+2\sin t$. 则易证

$$f(t,y)\le k(t)|y|+h(t),\quad (t,y)\in[a,\sigma(b)]\times\mathbb{R}.$$

另一方面, 既然 $s\in\left[a,\dfrac{\gamma_2(\eta-a+\beta_2)-\alpha_2\eta-\beta_2+a}{1-\alpha_2}\right)=\left[\frac{8}{27},\frac{218}{243}\right)$, 由 [188] 中引理 2.5 的证明过程可得 $\|G_2(\cdot,s)\|=G_2(1,s)$. 故

$$\int_a^{\sigma(b)}\|G_2(\cdot,s)\|k(s)\Delta s=\frac{6\cdot 11\cdot 16\cdot 47}{5\cdot 27^3}.$$

这样, 有

$$\begin{aligned} K\int_a^{\sigma(b)}\|G_2(\cdot,s)\|k(s)\Delta s &= \left(\prod_{j=1}^{2-1}K_j\right)\int_a^{\sigma(b)}\|G_2(\cdot,s)\|k(s)\Delta s \\ &= \tfrac{133}{324}\cdot\tfrac{6\cdot 11\cdot 16\cdot 47}{5\cdot 27^3}<1. \end{aligned}$$

因此, 根据定理 8.1.3.3, 边值问题 (8.1.1.2) 至少有一非平凡解 y^*.

§8.2 一类时间尺度上偶数阶边值问题的解与正解的存在性

§8.2.1 引言

本节内容选自我们最近的工作 [193]. 考虑如下时间尺度 $\mathbb{T}$ 上偶数阶三点边值问题:

$$\begin{cases} (-1)^n y^{\Delta^{2n}}(t) = f(t, y(\sigma(t))), \quad t \in [t_1, t_3] \subset \mathbb{T}, \\ y^{\Delta^{2i+1}}(t_1) = 0, \quad \alpha y^{\Delta^{2i}}(\sigma(t_3)) + \beta y^{\Delta^{2i+1}}(\sigma(t_3)) = y^{\Delta^{2i+1}}(t_2), \end{cases} \tag{8.2.1.1}$$

与

$$\begin{cases} (-1)^n y^{\Delta^{2n}}(t) = \lambda a(t) g(y(\sigma(t))), \quad t \in [t_1, t_3] \subset \mathbb{T}, \\ y^{\Delta^{2i+1}}(t_1) = 0, \quad \alpha y^{\Delta^{2i}}(\sigma(t_3)) + \beta y^{\Delta^{2i+1}}(\sigma(t_3)) = y^{\Delta^{2i+1}}(t_2), \end{cases} \tag{8.2.1.2}$$

对于 $0 \le i \le n-1$ 成立, 其中 $\alpha > 0$ 且 $\beta > 1$ 为给定的常数; $f : [t_1, \sigma(t_3)] \times [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ 连续, $\sigma(t_3)$ 右稠密且使得 $\sigma^j(t_3) = \sigma(t_3)$ 对于 $j \ge 1$ 成立; $\lambda > 0$ 为常数, $a : [t_1, \sigma(t_3)] \longrightarrow [0, +\infty)$ 连续, 在 $[t_2, \sigma(t_3)]$ 上不恒为零, 且 $g : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ 连续.

在 [186] 中, Hu 考虑了以下时间尺度上奇异三阶三点边值问题:

$$\begin{cases} (u^{\Delta\Delta}(t))^{\nabla} + w(t) f(t, u(t)) = 0, \quad t \in [a, b], \\ u(\rho(a)) - \beta u^{\Delta}(\rho(a)) = \alpha u(\eta), \quad \gamma u(\eta) = u(b), \quad u^{\Delta\Delta}(\rho(a)) = 0, \end{cases} \tag{8.2.1.3}$$

其中 $\eta \in (a, b)$, $\beta \ge 0$, $1 < \gamma < \frac{b-\rho(a)+\beta}{\eta-\rho(a)+\beta}$, $0 \le \alpha < \frac{b-\gamma\eta+(\gamma-1)(\rho(a)-\beta)}{b-\eta}$. 函数 $w(t) : (a, b) \longrightarrow [0, +\infty)$ 与 $f : [a, b] \times (0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ 连续. 非线性项 w 在点 $t = a$ 与 $t = b$ 处可以奇异, f 在点 $u = 0$ 处可以奇异. 通过使用锥拉伸与压缩不动点定理, 获得了 (8.2.1.3) 存在正解的充分条件.

最近, Yaslan[194] 讨论了以下时间尺度上偶数阶 m 点边值问题

$$\begin{cases} (-1)^n y^{\Delta^{2n}}(t) = f(t, y(\sigma(t))), \quad t \in [t_1, t_m] \subset \mathbb{T}, \\ y^{\Delta^{2i+1}}(t_m) = 0, \quad \alpha y^{\Delta^{2i}}(\sigma(t_1)) - \beta y^{\Delta^{2i+1}}(\sigma(t_1)) = \sum\limits_{k=2}^{m-1} y^{\Delta^{2i+1}}(t_k), \end{cases} \tag{8.2.1.4}$$

其中 $\alpha > 0$ 且 $\beta > 0$ 为给定的常数, $t_1 < t_2 < \cdots < t_{m-1} < t_m$, $m \ge 3$, $0 \le i \le n-1$. 作者建立问题 (8.2.1.4) 一个, 两个与三个正解的存在性定理. 其中一个正解的建立依赖于四泛函不动点定理 [195]. 有关时间尺度上高阶非局部问题的研究, 还可参见文 [196, 197].

我们注意到 Yaslan [189] 构造了边值问题 (8.2.1.1) 的 Green 函数, 且获得了以下定理:

定理 8.2.1.1 ([189) 假设 $\alpha > 0$, $\beta > 1$. 此外, 存在实数 $0 < r < R < \infty$ 使得

$$f(t,y) < \frac{1}{L^n} y, \quad 0 \le y \le r \tag{8.2.1.5}$$

且

$$f(t,y) > \frac{L^{n-1}}{k^{2n} M^{2n-1}} y, \quad R \le y < \infty \tag{8.2.1.6}$$

对于 $t \in [t_1, \sigma(t_3)]$ 成立, 其中 k, L, M 分别由 (8.2.2.2)-(8.2.2.4) 确定. 则边值问题 (8.2.1.1) 至少有一个正解.

证明积分方程正解存在性的常用工具之一为基于郭 [2, 12] 的锥拉伸与锥压缩 Krasnosel'skii's 不动点定理与其范数形式. 这一定理已被成功地应用于各种问题, 诸如常微分方程, 差分方程与时间尺度上动力学方程. 为便于应用, 众多学者致力于改进这一定理. 在 [198] 中, 作者讨论了泛函型的锥拉伸和锥压缩不动点定理. 对于进一步的抽象结果, 可参见 [199].

在 [200] 中, Zima 证明了如下 Leggett-Williams 型的不动点定理.

定理 8.2.1.2 ([200]) 令 E 为一实 Banach 空间, P 为 E 中的一正规锥, 且 γ 为 P 的正规常数. 对于 $u_0 \in P\backslash\{\theta\}$, 令 $P(u_0) = \{x \in P :$ 对于某个 $\lambda > 0$, 有$\lambda u_0 \preceq x\}$. 假定 Ω_1 与 Ω_2 为 E 中的有界开集, 使得 $\theta \in \Omega_1$ 且 $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2$. 令 $F : P \cap (\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1) \longrightarrow P$ 全连续, $u_0 \in P\backslash\{\theta\}$. 若以下条件之一满足:

(C_1) $\gamma\|x\| \le \|Fx\|$ $x \in P(u_0) \cap \partial\Omega_1$ 且 $\|Fx\| \le \|x\|$ $x \in P \cap \partial\Omega_2$,
(C_2) $\|Fx\| \le \|x\|$ $x \in P \cap \partial\Omega_1$ 且 $\gamma\|x\| \le \|Fx\|$ $x \in P(u_0) \cap \partial\Omega_2$
则 F 在 $P \cap (\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1)$ 中至少有不动点.

我们也乐意提及张和孙 [201, 202] 的结果, 在 [201, 202] 中, 张和孙通过用锥 P 上的某些凸泛函代替泛函继续推广这一定理 (令 E 为实 Banach 空间, P 为 E 中的锥). $\rho : P \longrightarrow \mathbb{R}$ 被称为 P 上的凸泛函, 若 $\rho(tx+(1-t)y) \le t\rho(x)+(1-t)\rho(y)$ 对于所有的 $x, y \in P$ 及 $t \in [0,1]$ 成立. 他们获得了以下主要结果:

定理 8.1.1.3 ([202]) 令 Ω_1 和 Ω_2 为 E 中的两个有界开集, 使得 $\theta \in \Omega_1$ 与 $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2$. 假定 $A : P \cap (\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1) \longrightarrow P$ 全连续, 且 $\rho : P \longrightarrow [0, +\infty)$ 是一个一致连续凸泛函, 满足 $\rho(\theta) = 0$, 对于 $x \ne \theta$, 有 $\rho(x) > 0$. 若以下条件之一满足:

(D_1) $\rho(Ax) \le \rho(x)$, $\forall x \in P \cap \partial\Omega_1$, 且 $\inf_{x \in P \cap \partial\Omega_2} \rho(x) > 0$, $\rho(Ax) \ge \rho(x)$, $\forall x \in$

$P \cap \partial\Omega_2$.

(D_2) $\inf_{x\in P\cap\partial\Omega_1} \rho(x) > 0$, $\rho(Ax) \geq \rho(x)$, $\forall x \in P \cap \partial\Omega_1$, 且 $\rho(Ax) \leq \rho(x)$, $\forall x \in P \cap \partial\Omega_2$.

则 A 在 $P \cap (\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1)$ 中至少有一个不动点.

注记 8.2.1.1 ([202]) 显然, $\rho(x) = \|x\|$ 是一个一致连续凸泛函, 满足 $\rho(\theta) = 0$ 且 $\rho(x) > 0$ 对于 $x \neq \theta$ 成立. 进而既然 $\theta \in \Omega_1$ 与 $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2$, 我们有 $\inf_{x\in P\cap\partial\Omega_1} \|x\| > 0$ 与 $\inf_{x\in P\cap\partial\Omega_2} \|x\| > 0$.

最近, Cid, Franco 与 Minhós 将单调迭代技巧与锥上的 Guo-Krasnosel'skii 不动点定理相结合, 获得了以下结果.

定理 8.2.1.4 ([203]) 令 E 为实 Banach 空间, K 为正规常数 $\gamma \geq 1$ 的正规锥, 其内点非空, 且 $A: K \longrightarrow K$ 全连续. 定义 $S = \{x \in K : Ax \leq x\}$, 假定

(i) 存在 $x_0 \in S$ 与 $\bar{R} > 0$ 使得 $B[x_0, \bar{R}] = \{x \in E : \|x - x_0\| \leq \bar{R}\} \subset K$, 即 $x_0 \in S \cap int(K)$, 且以下条件之一满足:

(ii) S 有界;

(iii) 存在 $r > 0$ 使得 $S \cap B[\theta, r] = \emptyset$.

进一步, 若 A 在

$$K_1 = \{x \in K : \frac{\bar{R}}{\gamma} \leq \|x\| \leq \gamma\|x_0\|\}$$

上非减, 其中 $\gamma \geq 1$ 为锥的正规常数. 则存在 $x \in K$, $x \neq \theta$ 使得 $x = Ax$.

在本节中, 我们将从两方面改进和推广定理 8.2.1.1. 一方面, 借助于定理 8.2.1.1 减弱在 (8.2.1.6) 中对 f 的限制 (见定理 8.2.3.1). 另一方面, 通过构造在文 [201, 202] 中出现的适当的凸泛函, 将考虑 f 在有界集上的性质. 进一步, 借助于定理 8.2.1.3, 将建立新的存在性定理 (见定理 8.2.3.2).

§8.2.2 预备知识

令 $G(t,s)$ 为以下边值问题的 Green 函数

$$\begin{cases} -y^{\Delta^2}(t) = 0, & t \in [t_1, t_3] \subset \mathbb{T}, \\ y^{\Delta}(t_1) = 0, & \alpha y(\sigma(t_3)) + \beta y^{\Delta}(\sigma(t_3)) = y^{\Delta}(t_2). \end{cases}$$

通过直接的计算, 有

$$G(t,s) = \begin{cases} H(t,s), & t_1 \leq s \leq t_2, \\ K(t,s), & t_2 < s \leq t_3, \end{cases} \tag{8.2.2.1}$$

其中

$$H(t,s)=\begin{cases}\sigma(t_3)-t+\dfrac{\beta-1}{\alpha}, & \sigma(s)\le t,\\ \sigma(t_3)-\sigma(s)+\dfrac{\beta-1}{\alpha}, & t\le s,\end{cases}$$

且

$$K(t,s)=\begin{cases}\sigma(t_3)-t+\dfrac{\beta}{\alpha}, & \sigma(s)\le t,\\ \sigma(t_3)-\sigma(s)+\dfrac{\beta}{\alpha}, & t\le s.\end{cases}$$

为了陈述和证明本节的主要结果, 我们需以下引理:

引理 8.2.2.1 ([189]) 令 $\alpha>0$, $\beta>1$. 则 (8.2.2.1) 中的 Green 函数 $G(t,s)$ 满足以下不等式:

$$G(t,s)\ge\frac{t-t_1}{\sigma(t_3)-t_1}G(\sigma(t_3),s)$$

对于 $(t,s)\in[t_1,\sigma(t_3)]\times[t_1,t_3]$ 成立.

引理 8.2.2.2 ([189]) 令 $\alpha>0$, $\beta>1$. 则 (8.2.2.1) 中的 Green 函数 $G(t,s)$ 满足以下性质:

$$0<G(t,s)\le G(\sigma(s),s)$$

对于 $(t,s)\in[t_1,\sigma(t_3)]\times[t_1,t_3]$ 成立.

引理 8.2.2.3 ([189]) 令 $\alpha>0$, $\beta>1$ 且 $s\in[t_1,t_3]$. 则 (8.2.2.1) 中的 Green 函数 $G(t,s)$ 满足以下性质:

$$\min_{t\in[t_2,\sigma(t_3)]}G(t,s)\ge k\|G(\cdot,s)\|,$$

其中

$$k=\frac{\beta-1}{\alpha(\sigma(t_3)-\sigma(t_1))+\beta-1},\tag{8.2.2.2}$$

且 $\|\cdot\|$ 定义如下 $\|x\|=\max_{x\in[t_1,\sigma(t_3)]}|x(t)|$.

对于 (8.2.2.1) 中的 G, 若我们令 $G_1(t,s):=G(t,s)$. 则对于 $2\le j\le n$, 我们递归地定义

$$G_j(t,s)=\int_{t_1}^{\sigma(t_3)}G_{j-1}(t,r)G(r,s)\Delta r$$

故 $G_n(t,s)$ 为以下齐次问题的 Green 函数:

$$\begin{cases} (-1)^n y^{\Delta^{2n}}(t) = 0, \quad t \in [t_1, t_3] \subset \mathbb{T}, \\ y^{\Delta^{2i+1}}(t_1) = 0, \quad \alpha y^{\Delta^{2i}}(\sigma(t_3)) + \beta y^{\Delta^{2i+1}}(\sigma(t_3)) = y^{\Delta^{2i+1}}(t_2), \quad 0 \le i \le n-1. \end{cases}$$

引理 8.2.2.4 ([189]) 令 $\alpha > 0$, $\beta > 1$. 则 Green 函数 $G_n(t,s)$ 满足以下不等式:

$$0 \le G_n(t,s) \le L^{n-1}\|G(\cdot,s)\|, \quad (t,s) \in [t_1, \sigma(t_3)] \times [t_1, t_3]$$

且

$$G_n(t,s) \ge k^n M^{n-1}\|G(\cdot,s)\|, \quad t,s \in [t_2, \sigma(t_3)] \times [t_1, t_3]$$

其中 k 由 (8.2.2.2) 式给出,

$$L = \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \|G(\cdot,s)\|\Delta s > 0, \tag{8.2.2.3}$$

且

$$M = \int_{t_2}^{\sigma(t_3)} \|G(\cdot,s)\|\Delta s > 0. \tag{8.2.2.4}$$

令 $\mathcal{B}$ 表示赋予范数 $\|y\| = \max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}|y(t)|$ 的 Banach 空间 $C[t_1, \sigma(t_3)]$.

§8.2.3 正解的存在性

在本部分中, 我们应用定理 8.2.1.2 和定理 8.2.1.3, 建立边值问题 (8.2.1.1) 解的存在性定理.

定理 8.2.3.1 假定以下条件满足:

(H_1) 存在 $r_1 > 0$ 使得对于 $t \in [t_1, \sigma(t_3)]$ 与 $y \in [0, r_1]$, 有

$$f(t,y) \le \frac{r_1}{L^n};$$

(H_2) 存在 $t_0 \in (t_2, \sigma(t_3)]$, $a > 0$, $r_2 > 0$, $r_2 \ne r_1$, 和连续函数 $\varphi : [t_2, \sigma(t_3)] \longrightarrow [0, +\infty)$, $h : (0, r_2] \longrightarrow [0, +\infty)$ 使得

$$f(t,y) \ge \varphi(t)h(y)$$

关于 $t \in [t_2, \sigma(t_3)]$ 及 $y \in [0, r_2]$ 成立, $\dfrac{h(y)}{y^a}$ 在 $(0, r_2]$ 上非增, 且

$$h(r_2)\left(\frac{k^n M^{n-1}}{L^{n-1}}\right)^a \int_{t_2}^{\sigma(t_3)} G_n(t_0,s)\varphi(s)\Delta s \ge r_2,$$

其中 k, L, M 分别由 (8.2.2.2)-(8.2.2.4) 给出. 则边值问题 (8.2.1.1) 在 $[t_1,\sigma(t_3)]$ 上至少有一个正解.

定理 8.2.3.2 若存在常数 a 与 b 满足 $0<b<a$, 且以下条件之一成立:

(H_3) $a \geq \left(\dfrac{L^{n-1}}{k^nM^{n-1}}\right)^2 b$, $f(t,y)\geq \dfrac{a}{k^nM^n}$, $(t,y)\in[t_2,\sigma(t_3)]\times\left[a\dfrac{k^nM^{n-1}}{L^{n-1}},a\right]$ 且 $f(t,y)\leq\dfrac{b}{L^n}$, $(t,y)\in[t_1,\sigma(t_3)]\times\left[0,\dfrac{L^{n-1}}{k^nM^{n-1}}b\right]$;

(H_4) $\dfrac{a}{b}\geq\dfrac{L^n}{k^nM^n}$, $f(t,y)\leq\dfrac{a}{L^n}$, $(t,y)\in[t_1,\sigma(t_3)]\times\left[0,\dfrac{L^{n-1}}{k^nM^{n-1}}a\right]$ 且 $f(t,y)\geq \dfrac{b}{k^nM^n}$, $(t,y)\in[t_2,\sigma(t_3)]\times\left[b\dfrac{k^nM^{n-1}}{L^{n-1}},b\right]$,

其中 k, L, M 分别由 (8.2.2.2)-(8.2.2.4) 给出. 则边值问题 (8.2.1.1) 至少有一个正解.

定理 8.2.3.1 的证明 考虑 Banach 空间 $\mathcal{B}$, 取

$$P=\left\{y\in\mathcal{B},\ \ y(t)\geq 0,\ \ t\in[t_1,\sigma(t_3)],\ \ \min_{t\in[t_2,\sigma(t_3)]}y(t)\geq\frac{k^nM^{n-1}}{L^{n-1}}\|y\|\right\}. \tag{8.2.3.1}$$

易见 P 为 $\mathcal{B}$ 中的一个正规锥 $(\gamma=1)$. 对于 x, $y\in\mathcal{B}$, $x\preceq y$ 当且仅当 $x(t)\leq y(t)$ 对每一个 $t\in[t_1,\sigma(t_3)]$ 成立. 固定 $u_0\equiv 1$ 在 $[t_1,\sigma(t_3)]$ 上. 则

$$P(u_0)=\left\{y\in\mathcal{B}:y(t)\geq 0,\ \ \min_{t\in[t_2,\sigma(t_3)]}y(t)>\frac{k^nM^{n-1}}{L^{n-1}}\|y\|\right\}.$$

对于 $y\in P$ 与 $t\in[t_1,\sigma(t_3)]$, 我们定义积分算子

$$Ay(t)=\int_{t_1}^{\sigma(t_3)}G_n(t,s)f(s,y(\sigma(s)))\Delta s,$$

易见 A 的不动点是边值问题 (8.2.1.1) 的解. 从文 [188] 的定理 3 的证明可知, $A:P\longrightarrow P$ 全连续.

令 $\Omega_1=\{y\in\mathcal{B}:\|y\|<r_1\}$, $\Omega_2=\{y\in\mathcal{B}:\|y\|<r_2\}$, 我们可设 $r_1<r_2$. 由 (H_1), 对于 $y\in P\cap\partial\Omega_1$ 与 $t\in[t_1,\sigma(t_3)]$, 可得

$$Ay(t)\leq L^{n-1}\int_{t_1}^{\sigma(t_3)}\|G(\cdot,s)\|\frac{r_1}{L^n}\Delta s=r_1.$$

这样 $\|Ay\|\leq\|y\|$ 对于 $y\in P\cap\partial\Omega_1$ 成立.

令 $y \in P(u_0) \cap \partial\Omega_2$, 则 $\|y\| = r_2$ 且 $y(t) \in (0, r_2]$ 对于 $t \in [t_2, \sigma(t_3)]$ 成立. 由 (H_2), 可得

$$\begin{aligned} Ay(t_0) &= \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_n(t_0, s) f(s, y(\sigma(s)))\Delta s \\ &\geq \int_{t_2}^{\sigma(t_3)} G_n(t_0, s)\varphi(s)h(y(\sigma(s)))\Delta s \\ &= \int_{t_2}^{\sigma(t_3)} G_n(t_0, s)\varphi(s)\frac{h(y(\sigma(s)))}{y^a(\sigma(s))}y^a(\sigma(s))\Delta s \\ &\geq \frac{h(r_2)}{r_2^a}\int_{t_2}^{\sigma(t_3)} G_n(t_0, s)\varphi(s)y^a(\sigma(s))\Delta s \\ &> \frac{h(r_2)}{r_2^a}\int_{t_2}^{\sigma(t_3)} G_n(t_0, s)\varphi(s)\left(\frac{k^n M^{n-1}}{L^{n-1}}\|y\|\right)^a \Delta s \\ &= h(r_2)\left(\frac{k^n M^{n-1}}{L^{n-1}}\right)^a \int_{t_2}^{\sigma(t_3)} G_n(t_0, s)\varphi(s)\Delta s \\ &\geq r_2. \end{aligned}$$

这可推出 $\|Ay\| \geq \|y\|$ 对于 $y \in P(u_0) \cap \partial\Omega_2$ 成立. 根据定理 8.2.1.2, A 有一个不动点 $y^* \in P$ 使得 $r_1 \leq \|y^*\| \leq r_2$.

定理 8.2.3.2 的证明 取

$$\Omega_1 = \{y \in \mathcal{B} | \rho(y) < b\},$$

$$\Omega_2 = \{y \in \mathcal{B} | \rho(y) < a\}.$$

则 Ω_1 和 Ω_2 均为开集, 且 $\theta \in \Omega_1$, $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2$.

定义 $\rho(y) = \max\limits_{t \in [t_2, \sigma(t_3)]} y(t)$, 则 $\rho : P \longrightarrow [0, +\infty)$ 为一致连续凸泛函, 满足 $\rho(\theta) = 0$, 且 $\rho(u) > 0$ 对于 $u \neq 0$ 成立, 其中 P 由 (8.2.3.1) 给出.

若 $y \in P \cap \partial\Omega_1$, 则 $\rho(y) = b$, 且对于 $t \in [t_1, \sigma(t_3)]$, 我们有

$$0 \leq y(t) \leq \|y\| \leq \frac{L^{n-1}}{k^n M^{n-1}} b.$$

因此

$$
\begin{aligned}
\rho(Ay) &= \max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_n(t,s)f(s,y(\sigma(s)))\Delta s\\
&\le L^{n-1}\int_{t_1}^{\sigma(t_3)}\|G(\cdot,s)\|f(s,y(\sigma(s)))\Delta s\\
&\le L^{n-1}\frac{b}{L^n}\int_{t_1}^{\sigma(t_3)}\|G(\cdot,s)\|\Delta s\\
&= b=\rho(y).
\end{aligned}
$$

若 $y\in P\cap\partial\Omega_2$, 则 $\rho(y)=a$, 且对于 $t\in[t_2,\sigma(t_3)]$, 有

$$
a\frac{k^nM^{n-1}}{L^{n-1}}\le\|y\|\frac{k^nM^{n-1}}{L^{n-1}}\le y(t)\le\rho(y)=a.
$$

故

$$
\begin{aligned}
\rho(Ay) &\ge k^nM^{n-1}\int_{t_2}^{\sigma(t_3)}\|G(\cdot,s)\|f(s,y(\sigma(s)))\Delta s\\
&\ge k^nM^{n-1}\frac{a}{k^nM^n}\int_{t_2}^{\sigma(t_3)}\|G(\cdot,s)\|\Delta s\\
&= a=\rho(y).
\end{aligned}
$$

因此, 定理 8.2.1.3 中的条件 (D_1) 满足, 问题 (8.2.1.1) 至少有一个正解.

接下来, 我们检验定理 8.2.1.3 中的条件 (D_2). 若 $y\in P\cap\partial\Omega_1$, 则 $\rho(y)=b$, 且对于 $t\in[t_1,\sigma(t_3)]$, 我们有

$$
b\frac{k^nM^{n-1}}{L^{n-1}}\le\|y\|\frac{k^nM^{n-1}}{L^{n-1}}\le y(t)\le\rho(y)=b.
$$

故

$$
\begin{aligned}
\rho(Ay) &\ge k^nM^{n-1}\int_{t_2}^{\sigma(t_3)}\|G(\cdot,s)\|f(s,y(\sigma(s)))\Delta s\\
&\ge k^nM^{n-1}\frac{b}{k^nM^n}\int_{t_2}^{\sigma(t_3)}\|G(\cdot,s)\|\Delta s\\
&= b=\rho(y).
\end{aligned}
$$

若 $y\in P\cap\partial\Omega_2$, 则 $\rho(y)=a$, 且对于 $t\in[t_1,\sigma(t_3)]$, 我们有

$$
0\le y(t)\le\|y\|\le\frac{L^{n-1}}{k^nM^{n-1}}a.
$$

故

$$
\begin{aligned}
\rho(Ay) &= \max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_n(t,s)f(s,y(\sigma(s)))\Delta s \\
&\le L^{n-1}\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \|G(\cdot,s)\|f(s,y(\sigma(s)))\Delta s \\
&\le L^{n-1}\frac{a}{L^n}\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \|G(\cdot,s)\|\Delta s \\
&= a = \rho(y).
\end{aligned}
$$

因此, 定理 8.2.1.3 中的条件 (D_2) 满足, 故问题 (8.2.1.1) 至少有一个正解.

注记 8.2.3.1 在定理 8.2.3.1 中, 我们以条件 (H_2) 代替定理 8.2.1.1 中的条件 (8.2.1.6), 其包含了较一般与宽泛的函数. 在定理 8.2.3.2 中, 我们用条件 $(H_3)((H_4))$ 代替条件 (8.2.1.5) 和 (8.2.1.6), 在此我们仅需非线性项在某些有界集上的"高度"是适当的, 而与这些有界集之外的增长性无关.

§8.2.4 问题 (8.2.1.2) 的可解性

在本部分中, 我们应用定理 8.2.1.4, 获得问题 (8.2.1.2) 存在解的若干充分条件. 我们注意到定理 8.2.1.4 的显著特点是删去了施加在集合 S 上的下解条件.

我们定义锥 K 如下：

$$K = \{y\in\mathcal{B} : y(t)\ge 0,\quad t\in[t_1,\sigma(t_3)],\quad y(t)\ge\omega\|y\|,\quad [t_2,\sigma(t_3)]\}$$

对于某个 $0<\omega\le k^nM^{n-1}/L^{n-1}$ 成立 (ω 随后将被固定).

既然问题 (8.2.1.2) 等价于以下积分：

$$y(t)=\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_n(t,s)\lambda a(s)g(y(\sigma(s)))\Delta s,\quad t\in[t_1,\sigma(t_3)],$$

我们定义算子 $A:K\longrightarrow\mathcal{B}$ 如下:

$$Ay(t)=\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_n(t,s)\lambda a(s)g(y(\sigma(s)))\Delta s,\quad t\in[t_1,\sigma(t_3)].$$

由第三部分, 可知 $A:K\longrightarrow K$ 全连续. 另一方面, 易见 K 为正规锥, 正规常数 $\gamma=1$, 其内点非空.

定义

$$e=L^{n-1}\int_{t_1}^{\sigma(t_3)}\|G(\cdot,s)\|a(s)\Delta s.$$

主要结果为以下定理：

定理 8.2.4.1 假定 $\lim_{y\to\infty}\frac{g(y)}{y}=+\infty$, 且存在 $C\in[0,+\infty)$ 使得 g 在 $[0,C)$ 上非减. 若

$$0<\lambda<\sup_{y\in(0,C)}\frac{y}{eg(y)},$$

则问题 (8.2.1.2) 至少有一个正解.

证明 既然 $\lambda<\sup\limits_{y\in(0,C)}\frac{y}{eg(y)}$, 取 $R_0\in(0,C)$ 且 $0<\omega\le k^nM^{n-1}/L^{n-1}$ 使得

$$R_0-\lambda eg(R_0)>\omega R_0.$$

首先, 我们证明函数 $y_0(t)=R_0,\ t\in[t_1,\sigma(t_3)]$ 满足定理 8.2.1.4 中的条件 (i). 易于检验 $y_0\in int(K)$. 同时, 对于任意的 $t\in[t_1,\sigma(t_3)]$, 我们有

$$Ay_0(t)=\int_{t_1}^{\sigma(t_3)}G_n(t,s)\lambda a(s)g(y_0(\sigma(s)))\Delta s\le\lambda eg(R_0)<R_0=y_0(t).$$

此外, 既然 $\|y_0-Ay_0\|=R_0$, 对于 $t\in[t_2,\sigma(t_3)]$, 有

$$y_0(t)-Ay_0(t)\ge R_0-\lambda eg(R_0)>\omega R_0=\omega\|y_0-Ay_0\|.$$

故 $y_0\in S$ 与 y_0 满足条件 (i).

因为 g 在无穷远点的渐近性质, 定理 8.2.1.4 中的条件 (ii) 满足. 事实上, 对于固定的 $\lambda>0$, 选取 $D>0$ 充分大, 使得

$$\lambda D\omega\min_{t\in[t_2,\sigma(t_3)]}\int_{t_2}^{\sigma(t_3)}G_n(t,s)a(s)\Delta s>1,$$

进而取 $Y>0$ 使得当 $y\ge Y$ 时, 有 $g(y)\ge Dy$.

接下来, 假定 $y\in K$ 满足 $\|y\|\ge Y/\omega$. 则对于所有的 $t\in[t_2,\sigma(t_3)]$, 有 $y(t)\ge Y$, 与

$$\begin{aligned}Ay(t)&\ge\int_{t_2}^{\sigma(t_3)}G_n(t,s)\lambda a(s)g(y(\sigma(s)))\Delta s\\&\ge\lambda D\omega\|y\|\min_{t\in[t_2,\sigma(t_3)]}\int_{t_2}^{\sigma(t_3)}G_n(t,s)a(s)\Delta s\\&>\|y\|,\end{aligned}$$

这蕴含着 $Ay\not\le y$. 故集合 S 包含在以原点为心半径为 Y/ω 的球内.

最后, 既然 g 在 $[0,R_0]$ 上非减, 若我们取 y_1, $y_2\in K$ 满足 $y_1(t)\le y_2(t)\le R_0$, $t\in[t_2,\sigma(t_3)]$, 我们有

$$\begin{aligned}&Ay_2(t)-Ay_1(t)\\&=\int_{t_1}^{\sigma(t_3)}G_n(t,s)\lambda a(s)g(y_2(\sigma(s)))\Delta s-\int_{t_1}^{\sigma(t_3)}G_n(t,s)\lambda a(s)g(y_1(\sigma(s)))\Delta s\\&\ge 0,\end{aligned}$$

且对于 $t\in[t_2,\sigma(t_3)]$ 与 $r\in[t_1,\sigma(t_3)]$

$$\begin{aligned}&Ay_2(t)-Ay_1(t)\\&=\int_{t_1}^{\sigma(t_3)}G_n(t,s)\lambda a(s)[g(y_2(\sigma(s)))-g(y_1(\sigma(s)))]\Delta s\\&\ge\int_{t_1}^{\sigma(t_3)}k^nM^{n-1}\|G(\cdot,s)\|\lambda a(s)[g(y_2(\sigma(s)))-g(y_1(\sigma(s)))]\Delta s\\&\ge k^nM^{n-1}/L^{n-1}\int_{t_1}^{\sigma(t_3)}G_n(r,s)\lambda a(s)[g(y_2(\sigma(s)))-g(y_1(\sigma(s)))]\Delta s\\&\ge\omega\int_{t_1}^{\sigma(t_3)}G_n(r,s)\lambda a(s)[g(y_2(\sigma(s)))-g(y_1(\sigma(s)))]\Delta s\\&=\omega[Ay_2(r)-Ay_1(r)],\end{aligned}$$

故 $\min\limits_{t\in[t_2,\sigma(t_3)]}[Ay_2(t)-Ay_1(t)]\ge\omega\|Ay_2-Ay_1\|$ 且 A 非减. 因此, 定理 8.2.1.4 中所有的条件均满足. 问题 (8.2.1.2) 至少有一个正解.

注记 8.2.4.1 一般而言, 先前文献仅对充分小的 λ, 确保问题 (8.2.1.2) 的可解性, 即对于 $0<\lambda<\lambda_1$, 其中 λ_1 为一常数. 然而, 定理 8.2.4.1 表明问题 (8.2.1.2) 对于所有的 $\lambda>0$, 问题 (8.2.1.2) 均具有可解性, 即使对于某个 $y\in(0,C]$, 有 $g(y)=0$. 我们应当指出, 相应于问题 (8.2.1.2) 的线性问题的谱结构尚不清楚, 因此, 我们不能直接应用文 [204, 205] 的定理到这一问题.

§8.2.5 一些例子

在本部分中, 我们给出三个例子解释我们的结果.

例 8.2.5.1 令 $\mathbb{T}=\{(\frac{2}{5})^n:n\in\mathbb{N}_0\}\cup[2,3]$, 其中 $\mathbb{N}_0$ 表示所有非负整数集. 考虑以下边值问题:

$$\begin{cases}-y^{\Delta^2}(t)=f(t,y(\sigma(t))),\quad t\in[\frac{2}{5},3]\subset\mathbb{T},\\ y^{\Delta}(\frac{2}{5})=0,\quad y(\sigma(3))+3y^{\Delta}(\sigma(3))=y^{\Delta}(1),\end{cases}\tag{8.2.5.1}$$

其中

$$f(t,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{20}(t+1)y^2(y-5)^2, & (t,y)\in\left[\frac{2}{5},3\right]\times[0,5],\\ (t+1)^6(y-5)^7, & (t,y)\in\left[\frac{2}{5},3\right]\times(5,+\infty).\end{cases}$$

易于检验 $f:\left[\frac{2}{5},3\right]\times[0,+\infty)\longrightarrow[0,+\infty)$ 连续. 直接计算可得

$$k=\frac{1}{2},\quad G(t,s)=\begin{cases}H(t,s), & \frac{2}{5}\le s\le 1,\\ K(t,s), & 1<s\le 3,\end{cases}$$

其中

$$H(t,s)=\begin{cases}5-t, & \sigma(s)\le t,\\ 5-\sigma(s), & t\le s,\end{cases}$$

且

$$K(t,s)=\begin{cases}6-t, & \sigma(s)\le t,\\ 6-\sigma(s), & t\le s.\end{cases}$$

故有

$$\begin{aligned}L&=\int_{\frac{2}{5}}^{3}\|G(\cdot,s)\|\Delta s\\&=\int_{\frac{2}{5}}^{1}(5-\sigma(s))\Delta s+\int_{1}^{2}(6-\sigma(s))\Delta s+\int_{2}^{3}(6-\sigma(s))\Delta s\\&=\tfrac{99}{10}.\end{aligned}$$

选取 $r_1=\frac{1}{50}$, $r_2=2$, $t_0=2$, $a=2$, $\varphi(t)=\dfrac{1}{20}(t+1)$, 且 $h(y)=y^2(y-5)^2$, 易验证对于 $t\in\left[\frac{2}{5},3\right]$ 和 $y\in\left[0,\frac{1}{50}\right]$, 有

$$f(t,y)\le\frac{1}{20}\times(3+1)\frac{1}{50^2}\times\left(\frac{1}{50}-5\right)^2<\frac{1}{495}=\frac{1/50}{99/10}=\frac{r_1}{L}.$$

对于 $t\in[1,3]$ 与 $y\in(0,2]$, 有

$$\frac{1}{20}(t+1)y^2(y-5)^2=\varphi(t)h(y).$$

$\dfrac{h(y)}{y^a} = \dfrac{y^2(y-5)^2}{y^2} = (y-5)^2$ 在 $(0,2]$ 上非增, 且

$$\begin{aligned}
&h(2)\left(\frac{kM^0}{L^0}\right)^2\int_1^3 G(2,s)\frac{1}{20}(s+1)\Delta s\\
&=\tfrac{9}{20}\left[\int_1^2(6-2)(s+1)\Delta s+\int_2^3(6-\sigma(s))(s+1)\Delta s\right]\\
&=\tfrac{9}{20}\times\tfrac{121}{6}\\
&>2=r_2.
\end{aligned}$$

定理 8.2.3.1 的假设均满足, 因此问题 (8.2.5.1) 有一个正解 y^* 使得 $\frac{1}{50} \le \|y^*\| \le 2$.

例 8.2.5.2 令 $\mathbb{T} = \{1,2,3,4,5\}$, 考虑以下边值问题:

$$\begin{cases} y^{\Delta^2}(t) = f(t, y(t+1)), \quad t \in [1,4] \subset \mathbb{T}, \\ y^{\Delta^{2i+1}}(1) = 0, \quad y^{\Delta^{2i}}(5) + 2y^{\Delta^{2i+1}}(5) = y^{\Delta^{2i+1}}(3), \end{cases} \tag{8.2.5.2}$$

其中 $0 \le i \le 1,\ n = 2,\ t_1 = 1,\ t_2 = 3,\ t_3 = 4,\ \beta = 2,\ \alpha = 1$ 且

$$f(t,y) = \begin{cases} \frac{1}{121}\cdot\frac{4}{275}y, \quad y \le \frac{275}{4}, \\ \frac{3909\times3901\times275}{484\times559\times9}y - \frac{1075011\times1072739}{44^2\times559\times9}, \quad y \ge \frac{275}{4}, \end{cases}$$

易于验证 $f : [1,5] \times [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$ 连续, 直接计算可得

$$G(t,s) = \begin{cases} H(t,s), & 1 \le s \le 3, \\ K(t,s), & 3 < s \le 4, \end{cases}$$

其中

$$H(t,s) = \begin{cases} 6-t, & s+1 \le t, \\ 5-s, & t \le s, \end{cases}$$

$$K(t,s) = \begin{cases} 7-t, & s+1 \le t, \\ 6-s, & t \le s. \end{cases}$$

故

$$M = \int_3^{\sigma(4)} G(\sigma(s),s)\Delta s = 4,$$

$$L = \int_1^{\sigma(4)} G(\sigma(s),s)\Delta s = 11,$$

$$k=\frac{1}{5},\quad \frac{k^nM^{n-1}}{L^{n-1}}=\frac{k^2M}{L}=\frac{4}{275}.$$

选取 $a=71^2$, $b=1$, 我们可知 f 满足

$$f(t,y)\geq\frac{a}{k^nM^n}=\frac{a}{k^2M^2}=\frac{25}{16}\cdot 71^2,\qquad (t,y)\in[3,5]\times\left[a\frac{4}{275},a\right];$$

$$f(t,y)\leq\frac{b}{L^n}=\frac{b}{L^2}=\frac{1}{121},\qquad (t,y)\in[1,5]\times\left[0,\frac{275}{4}b\right].$$

因此, 定理 8.2.3.2 中的条件 (H_3) 满足, 边值问题 (8.2.5.2) 至少有一个正解.

如果我们取

$$f(t,y)=\begin{cases}\frac{1}{20}|\sin t|+27\cdot\frac{275}{64}y, & y\leq\frac{64}{275},\\ \frac{1}{20}|\sin t|+27\times\frac{275}{64}\times\frac{64}{275}, & y\geq\frac{64}{275}.\end{cases}$$

选取 $a=3630$, $b=16$, 则

$$\frac{a}{b}=\frac{3630}{16}\geq\frac{L^2}{k^2M^2}=121\times\frac{25}{16}.$$

计算可得

$$f(t,y)\leq\frac{a}{L^n}=\frac{3630}{11^2}=30,\quad (t,y)\in[1,5]\times\left[0,\frac{275}{4}\times 3630\right],$$

$$f(t,y)\geq\frac{b}{k^nM^n}=\frac{16}{1/25\times 16}=25,\quad (t,y)\in[3,5]\times\left[\frac{16\times 4}{275},16\right].$$

因此, 定理 8.2.3.2 中的条件 (H_4) 满足, 边值问题 (8.2.5.2) 至少有一个正解.

例 8.2.5.3 令 $\mathbb{T}$ 同例 8.2.5.1 中的定义一致, 考虑如下边值问题:

$$\begin{cases}-y^{\Delta^2}(t)=\lambda a(t)g(y(\sigma(t))), & t\in\left[\frac{2}{5},3\right]\subset\mathbb{T},\\ y^{\Delta}(\frac{2}{5})=0, \quad y(\sigma(3))+3y^{\Delta}(\sigma(3))=y^{\Delta}(1),\end{cases}\tag{8.2.5.3}$$

其中 $a(t)=1$, $g(y)=2y^3-9y^2+12y+\sqrt{y}$.

直接计算可得

$$e=\int_{\frac{2}{5}}^{1}G(\sigma(s),s)\Delta s=\frac{12}{5}.$$

函数 $g(y)$ 关于 $[0,+\infty)$ 不单调, 然而, 由 [203] 中的例 2 可知, $g(y)$ 在 $[0,1.087577)$ 上非减.

易验证 $\lim\limits_{y\to\infty}\frac{g(y)}{y}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{g(y)}{y}=+\infty$. 故定理 8.2.4.1 蕴含着对于 $0<\lambda<0.07526$, 边值问题 (8.2.5.3) 一个正解的存在性.

参 考 文 献

[1] 孙经先, 非线性泛函分析及其应用, 科学出版社, 北京, 2008.

[2] 郭大钧, 非线性泛函分析, 山东科学技术出版社, 济南, 2001.

[3] 郭大钧, 非线性分析中的半序方法, 山东科学技术出版社, 济南, 2000.

[4] W.A.J. Luxemburg, A.C. Zaanen, Riesz Spaces, vol I, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1971.

[5] M. Bohner, A. Peterson, Dynamic Equations on Time Scales: An Introduction with Applications, Birkhäuser, Boston, 2001.

[6] M. Bohner, A. Peterson (Eds.), Advances in Dynamic Equations on Time Scales, Birkhäuser, Boston, 2003.

[7] F.M. Atici, G.Sh. Guseinov, On Green's functions and positive solutions for boundary value problems on time scales, J. Comput. Appl. Math. 141 (2002) 75-99.

[8] K. Deimling, Nonlinear Functional Analysis, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[9] 李福义, 非线性算子方程的解及其应用, 博士学位论文, 山东大学, 济南, 1996.

[10] D. Guo, V. Lakshmikantham, Coupled fixed points of nonlinear operators with applications, Nonlinear Anal. 11 (1987) 623-632.

[11] Z. Drici, F.A. McRae, J. Vasundhara Devi, Fixed point theorems for mixed monotone operators with PPF dependence, Nonlinear Anal. 69 (2008) 632-636.

[12] D. Guo, V. Lakshmikantham, Nonlinear Problems in Abstract Cones, Academic Press, New York, 1988.

[13] 李福义, 一类非线性方程正解的存在唯一性, 应用数学学报, 20 (1997) 609-615.

[14] K. Li, J. Liang, T.J. Xiao, Positive fixed points for nonlinear operators, Comput. Math. Appl. 50 (2005) 1569-1578.

[15] K. Li, J. Liang, T.J. Xiao, New existence and uniqueness theorems of positive fixed points for mixed monotone operators with perturbation, J. Math. Anal. Appl. 328 (2007) 753-766.

[16] 梁展东, 王文霞, 列压缩算子的不动点定理及其应用, 数学学报 47 (2004) 173-180.

[17] 刘春晗, 张克玉, 王鑫, 带有次线性扰动的算子的不动点定理及其应用, 济南大学学报 (自然科学版) 22 (2008) 427-431.

[18] Z.T. Zhang, K.L. Wang, On fixed point theorems of mixed monotone operators and applications, Nonlinear Anal. 70 (2009) 3279-3284.

[19] Z.Q. Zhao, Existence and uniqueness of fixed points for some mixed monotone operators, Nonlinear Anal. 73 (2010) 1481-1490.

[20] C.B. Zhai, X.M. Cao, Fixed point theorems for τ-φ-concave operators and applications, Comput. Math. Appl. 59 (2010) 532-538.

[21] C.B. Zhai, C. Yang, X.Q. Zhang, Positive solutions for nonlinear operator equations and several classes of applications, Mathematische Zeitschrift (in press).

[22] Y.X. Wu, Z.D. Liang, Existence and uniqueness of fixed points for mixed monotone operators with applications, Nonlinear Anal. 65 (2006) 1913-1924.

[23] 郭大钧, 孙经先, 非线性积分方程, 山东科学技术出版社, 济南, 1987.

[24] S. Hilger, Analysis on measure chains-a unified approach to continuous and discrete calculus, Results Math. 18 (1990) 18-56.

[25] R.P. Agarwal, V. Otero-Espinar, K. Perera, and D. R. Vivero, Multiple positive solutions of singular Dirichlet problems on time scales via variational methods, Nonlinear Anal. 67 (2007) 368-381.

[26] D.R. Anderson, P.J.Y. Wong, Positive solutions for second-order semipositone problems on time scales, Comput. Math. Appl. 58 (2009) 281-291.

[27] C.J. Chyan, J. Henderson, Eigenvalue problem for nonlinear differential equations on a measure chain, J. Math. Anal. Appl. 245 (2000) 547-559.

[28] L.H. Erbe, A. Peterson, Green's functions and comparison theorems for differential equation on measure chains, Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. 6 (1999) 121-137.

[29] Z.C. Hao, T.J. Xiao, J. Liang, Existence of positive solutions for singular boundary value problem on time scales, J. Math. Anal. Appl. 325 (2007) 517-528.

[30] T. Jankowski, On dynamic equations with deviating arguments, Appl. Math. Comput. 208 (2009) 423-426.

[31] 李红玉, 孙经先, 崔玉军, 测度链上的非线性微分方程的正解, 数学年刊, 30 (2009) 97-106.

[32] Y.B. Sang, Successive iteration and positive solutions for nonlinear m-point boundary value problems on time scales, Discrete Dyn. Nat. Soc. 2009, Article ID 618413, 13 pages.

[33] P.G. Wang, H.X. Wu, Y.H. Wu, Higher even-order convergence and coupled solutions for second-order boundary value problems on time scales, Comput. Math. Appl. 55 (2008) 1693-1705.

[34] H. Amann, Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces, SIAM Rev. 18 (1976) 620-709.

[35] 张克梅, 非线性算子方程的多重解与变号解及其应用, 博士学位论文, 山东大学, 济南, 2002.

[36] R.W. Leggett, L.R. Williams, Multiple positive fixed points of nonlinear operators on ordered Banach spaces, Indiana Univ. Math. J. 28 (1979) 673-688.

[37] R.I. Avery, A generalization of the Leggett-Williams fixed point theorem, Math. Sci. Res. Hot-Line 3 (1999) 9-14.

[38] R.I. Avery, A.C. Peterson, Three positive fixed points of nonlinear operators on ordered Banach spaces, Comput. Math. Appl. 42 (2001) 313-322.

[39] F. Li, G. Han, Generalization for Amann's and Leggett-Williams' three-solution theorems and applications, J. Math. Anal. Appl. 298 (2004) 638-654.

[40] 孙经先, 两点拉伸型不动点定理及其应用, 系统科学与数学, 12 (1992) 284-286.

[41] 李福义, 两点拉伸型不动点定理与凸凹算子方程的解及其应用, 数学学报, 40 (1997) 457-464.

[42] 王文霞, 李桂芳, 关于两点拉伸型不动点定理的几点注记, 山西师范大学学报 (自然科学版), 14 (2000) 27-30.

[43] 郭大钧, 孙经先, 刘兆理, 非线性常微分方程泛函方法, 山东科学技术出版社, 济南, 1995.

[44] X. Xu, J. Sun, Solutions for an operator equation under the conditions of pairs of paralleled lower and upper solutions, Nonlinear Anal. 69 (2008) 2251-2266.

[45] A. Cabada, J.A. Cid, Existence of a non-zero fixed point for nondecreasing operators proved via Krasnoselskii's fixed point theorem, Nonlinear Anal. 71 (2009) 2114-2118.

[46] M.A. Krasnoselskii, Positive Solutions of Operator Equations, Noordhoff, Groningen, 1964.

[47] A.J.B. Potter, Applications of Hilbert's projective metric to certain classes of non-homogeneous operators, Quart. J. Math. Oxford 2 (1977) 93-99.

[48] 赵增勤, α 凹算子与 β 凸算子之和的多重不动点及其应用, 系统科学与数学, 27 (2) (2007) 177-183.

[49] Z.Q. Zhao, Multiple fixed points of a sum operator and applications, J. Math. Anal. Appl. 360 (2009) 1-6.

[50] Z.Q. Zhao, Fixed points of τ-φ-convex operators and applications, Appl. Math. Lett. 23 (2010) 561-566.

[51] K. Li, J. Liang, T.J. Xiao, A fixed point theorem for convex and decreasing operators, Nonlinear Anal. 63 (2005) 209-216.

[52] Y.Z. Chen, The existence of a fixed point for the sum of two monotone operators, Positivity 12 (2008) 643-652.

[53] G. Zhang, J. Sun, A generalization of the cone expansion and compression fixed point theorem and applications, Nonlinear Anal. 67 (2007) 579-586.

[54] 孙冬冬, 张国伟, 张铁, 凹泛函型锥拉伸与压缩不动点定理, 数学学报, 53 (2010) 847-852.

[55] R.I. Avery, J. Henderson, D.R. Anderson, A topological proof and extension of the Leggett-Williams fixed point theorem, Commun. Appl. Nonlinear Anal. 16 (2009) 39-44.

[56] D.R. Anderson, R.I. Avery, J. Henderson, Functional expansion-compression fixed point theorem of Leggett-Williams type, Electron. J. Differential Equations 63 (2010) 1-9.

[57] 李福义, 梁展东, φ 凹 (凸) 算子的不动点定理及其应用, 系统科学与数学, 14 (4) (1994) 355-360.

[58] D.J. Guo, V. Lakshmikantham, X.Z. Liu, Nonlinear Integral Equations in Abstract Spaces, Kluwer Academic Publishers, 1996.

[59] M. Moshinsky, Sobre los problems de condiciones a la frontiera en una dimension de caracteristicas discontinuas, Bol. Soc. Mat. Mexicana. 7 (1950) 1-25.

[60] S. Timoshenko, Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill, New York, 1961.

[61] 江卫华, 常微分方程多点边值问题的正解, 博士学位论文, 河北师范大学, 石家庄, 2009.

[62] 马如云, 非线性常微分方程非局部问题, 科学出版社, 北京, 2004.

[63] 葛渭高, 非线性常微分方程边值问题, 科学出版社, 北京, 2007.

[64] A.R. Khan, J.R.L. Webb, Existence of at least three solutions of a second-order three-point boundary value problem, Nonlinear Anal. 64 (2006) 1356-1366.

[65] R.Y. Ma, D. O'Regan, Nodal solutions for second-order m-point boundary value problems with nonlinearities across several eigenvalues, Nonlinear Anal. 64 (2006) 1562-1577.

[66] B.P. Rynne, Spectral properties and nodal solutions for second-order, m-point, boundary value problems, Nonlinear Anal. 67 (2007) 3318-3327.

[67] J.R.L. Webb, Remarks on a non-local boundary value problem, Nonlinear Anal. 72 (2010) 1075-1077.

[68] X. Xu, D. O'Regan, J. Sun, Multiplicity results for three-point boundary value problems with a non-well-ordered upper and lower solution condition, Math. Comput. Modelling 45 (2007) 189-200.

[69] L.J. Kong, Q.K. Kong, J.S.W. Wong, Nodal solutions of multi-point boundary value problems, Nonlinear Anal. 72 (2010) 382-389.

[70] B.M. Liu, L.S. Liu, Y.H. Wu, Positive solutions for singular second order three-point boundary value problems, Nonlinear Anal. 66 (2007) 2756-2766.

[71] Z.Q. Zhao, Exact solutions of a class of second-order nonlocal boundary value problems and applications, Appl. Math. Comput. 215 (2009) 1926-1936.

[72] E.N. Dancer, Y. Du, Existence of sign-changing solutions for some semilinear problems with jumping nonlinearities at zero, Proc. Roy. Soc. Edinburgh 124A (1994) 1165-1176.

[73] Z.T. Zhang, S.J. Li, On sign-changing and multiple solutions of the p-Laplacian, J. Funct. Anal. 197 (2003) 447-468.

[74] W.M. Zou, Sign-Changing Critical Point Theory, Springer, New York, 2008.

[75] D. Motreanu, M. Tanaka, Sign-changing and constant-sign solutions for p-Laplacian problems with jumping nonlinearities, J. Differential Equations 249 (2010) 3352-3376.

[76] X. Xu, J. Sun, On sign-changing solution for some three-point boundary value problems, Nonlinear Anal. 59 (2004) 491-505.

[77] X. Xu, D. O'Regan, A three solutions theorem for nonlinear operator equations in ordered Banach spaces, Positivity 10 (2006) 647-664.

[78] F.Y. Li, Z.P. Liang, Q. Zhang, Y.H. Li, On sign-changing solutions for nonlinear operator equations, J. Math. Anal. Appl. 327 (2007) 1010-1028.

[79] X. Xu, Multiple sign-changing solutions for some m-point boundary value problems, Electron. J. Differential Equations 89 (2004) 1-14.

[80] 杨仁明, 非线性微分方程边值问题的正解、变号解的存在性, 硕士学位论文, 山东师范大学, 济南, 2006.

[81] C. Pang, W. Dong, Z. Wei, Multiple solutions for fourth-order boundary value problems, J. Math. Anal. Appl. 314 (2006) 464-476.

[82] Z.L. Wei, C.C. Pang, Multiple sign-changing solutions for fourth order m-point boundary value problems, Nonlinear Anal. 66 (2007) 839-855.

[83] Y.H. Li, F.Y. Li, Sign-changing solutions to second-order integral boundary value problems, Nonlinear Anal. 69 (2008) 1179-1187.

[84] T.S. He, W. Yang, F.J. Yang, Sign-changing solutions for discrete second-order three-point boundary value problems, Discrete Dynamics in Nature and Society 2010, ArticleID705387, 14pages.

[85] K.M. Zhang, X.J. Xie, Existence of sign-changing solutions for some asymptotically linear three-point boundary value problems, Nonlinear Anal. 70 (2009) 2796-2805.

[86] X. Liu, J. Sun, Computation of topological degree of unilaterally asymptotically linear operators and its applications, Nonlinear Anal. 71 (2009) 96-106.

[87] H. Li, Y. Liu, Multiple solutions for fourth order m-point boundary value problems with sign-changing nonlinearity, Electron. J. Qual. Theory Differ Equ. 55 (2010) 1-10.

[88] L. Lassoued, A. Maalaoui, Existence of nontrivial solutions for a class of elliptic systems, Annals of University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser. 36 (2009) 17-23.

[89] 孙经先, 刘笑颖, 非锥映射的不动点指数计算及其应用, 数学学报, 53 (2010) 417-428.

[90] 张克梅, 孙经先, 渐近线性算子方程的四种类型的解, 数学学报, 50 (2007) 1403-1410.

[91] M.A. Krasnosel'skiĭ, P.P. Zabreĭko, Geometrical Methods of Nonlinear Analysis, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[92] E. Zeidler, Nonlinear Functional Analysis and Its Applications, I: Fixed-Point Theorems, Springer-Verlag, New York, 1986.

[93] H. Amann, Fixed points of asymptotically linear maps in ordered Banach spaces, J. Funct. Anal. 14 (1973) 162-171.

[94] H. Amann, On the number of solutions of nonlinear equations in ordered Banach spaces, J. Funct. Anal. 11 (1972) 346-384.

[95] Y. Sang, H. Su, F. Xu, Positive solutions of nonlinear m-point BVP for an increasing homeomorphism and homomorphism with sign changing nonlinearity on time scales, Comput. Math. Appl. 58(2009)216-226.

[96] D.R. Anderson, R. Avery, J. Henderson, Existence of solutions for a one-dimensional p-Laplacian on time scales, J. differen. Equ. Appl. 10(2004) 889-896.

[97] J.J. Dacunha, J.M. Davis, P.K. Singh, Existence results for singular three point boundary value problems on time scales, J. Math.Anal.Appl. 295(2004) 378-391.

[98] Z.M. He, Double positive solutions of three-point boundary value problems for p-Laplacian dynamic equations on time scales, J. Comput. Appl. Math. 182 (2005) 304-315.

[99] Z.M. He, Triple positive solutions of boundary value problems for p-Laplacian dynamic equations on time scales, J. Math.Anal.Appl. 321(2006) 911-920.

[100] E.R. Kaufmann, Positive solutions of a three-point boundary value problem on a time scale, Eletron. J. Diff. Equ. 82 (2003) 1-11.

[101] H. Luo, Q.Z. Ma, Positive solutions to a generalized second-order three-point boundary value problem on time scales, Eletron. J. Diff. Equ. 17 (2005) 1-14.

[102] H. Su, B. Wang, Z. Wei, Positive solutions of four-point boundary value problems for four-order p-Laplacian dynamic equations on time scales, Eletron. J. Differen. Equ. 78 (2006)1-13.

[103] H.R. Sun, W.T. Li, Existence theory for positive solutions to one-dimensional p-Laplacian boundary value problems on time scales, J Differential Equations. 240 (2007) 217-248.

[104] H.R. Sun, W.T. Li, Positive solutions for nonlinear three-point boundary value problems on time scales, J. Math.Anal.Appl. 299 (2004) 508-524.

[105] H.R. Sun, W.T. Li, Positive solutions for nonlinear m-point boundary value problems on time scales, Acta Mathematica Sinica 49(2006) 369-380(in Chinese).

[106] D. Ma, Z. Du, W. Ge, Existence and iteration of monotone positive solutions for multipoint boundary value problem with p-Laplacian operator, Comput. Math. Appl. 50(2005)729-739.

[107] Y. Wang, C. Hou, Existence of multiple positive solutions for one-dimensional p-Laplacian, J. Math.Anal.Appl. 315(2006)144-153.

[108] B.F. Liu, J.H. Zhang, The existence of positive solutions for some nonlinear boundary value problems with linear mixed boundary conditions, J. Math. Anal. Appl. 309(2005) 505-516.

[109] R.P. Agarwal, H. Lü, D. O'Regan, Existences theorems for the one-dimensional singular p-Laplacian equation with sign changing nonlinearities, Appl. Math. Comput. 143 (2003) 15-38.

[110] D. Ji, M. Feng, W. Ge, Multiple positive solutions for multipoint boundary value problems with sign changing nonlinearity, Appl. Math. Comput. 196(2008)515-520.

[111] Y.Z. Zhu, J. Zhu, The multiple positive solutions for p-Laplacian multipoint BVP with sign changing nonlinearity on time scales, J.Math.Anal.Appl. 344(2008)616-626.

[112] X.F. Li, Existence of positive solutions for boundary value problem with p-Laplacian based on nonlinear terms sign changing, Journal of JiangXi Normal University(Natural Science) 32(2008) 15-18(in Chinese).

[113] W.G. Ge, J.L. Ren, Fixed point theorems in double cones and their applications to nonlinear boundary value problems, J. Contemporary Math. 27(2006) 155-168.

[114] Y.P. Guo, W.G. Ge, S.J. Dong, Two positive solutions for second order three-point boundary value problems with sign changing nonlinearities, Acta Mathematicae Applicatae Sinica 27(2004)522-529(in Chinese).

[115] R.P. Agarwal, M. Bohner, P. Rehak, Half-linear dynamic equations, Nonlinear analysis and applications: to V. Lakshmikantham on his 80th birthday, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003, p. 1-57.

[116] Y. Sang, H. Su, Positive solutions of nonlinear difference equations involving the p-Laplacian with sign changing nonlinearity, Electron. J. Differential Equations 63(2009)1-7.

[117] R.P. Agarwal, Difference Equations and Inequalities, Marcel Dekker, New York, 1992.

[118] R.P. Agarwal, M.Bohner, P.J.Y. Wong, Eigenvalues and eigenfunctions of discrete conjugate boundary value problems, Comput. Math. Appl. 38(3-4) (1999) 159-183.

[119] W.G. Kelley, A.C. Peterson, Difference Equations, Academic Press, Boston, 1991.

[120] V.Lakshmikantham, D.Trigiante, Theory of Difference Equations: Numerical Methods and Applications, Academic Press, New York, 1988.

[121] Pasquale Candito, Nicola Giovannelli, Multiple solutions for a discrete boundary value problem involving the p-Laplacian, Comput. Math. Appl. 56 (2008) 959-964.

[122] J.Henderson, Positive solutions for nonlinear difference equations, Nonlinear Stud. 4(1) (1997) 29-36.

[123] Z.M. He, On the existence of positive solutions of p-Laplacian difference equations, J. Comput. Appl. Math. 161 (2003) 193-201.

[124] Y.K. Li, L.H. Lu, Existence of positive solutions of p-Laplacian difference equations, Appl. Math. Lett. 19 (2006) 1019-1023.

[125] F.Merdivenci, Two positive solutions of a boundary value problem for difference equations, J. Difference Equa. Appl. 1 (1995) 263-270.

[126] D.B. Wang, W. Guan, Three positive solutions of boundary value problems for p-Laplacian difference equations, Comput. Math. Appl. 55 (2008) 1943-1949.

[127] P.J.Y. Wong, Positive solutions of difference equations with two-point right focal boundary conditions, J. Math. Anal. Appl. 224 (1998) 34-58.

[128] K. Q. Lan, Multiple positive solutions of semilinear differential equations with singularities, J. London Math. Soc. 63 (2001) 690-704.

[129] E.R. Kaufmann, N. Kosmatov, Positive solutions of the semipositone Sturm-Liouville boundary value problem, Commun. Math. Anal. 3 (2007) 57-67.

[130] J.P. Sun, W.T. Li, Solutions and positive solutions to semipositone Dirichlet BVPs on time scales, , Dynam. Systems Appl. 17 (2008) 303-312.

[131] F.A. Davidson, B.P. Rynne, Global bifurcation on time scales, J. Math. Anal. Appl. 267 (2002) 345-360.

[132] H. Luo, Bifurcation from interval and positive solutions of a nonlinear second-order dynamic boundary value problem on time scales, Abst. Appl. Anal. 2012, Article ID 316080, 15pages.

[133] H.Y. Li, L.M. Dai, Positive solutions for nonlinear differential equations with sign changing nonlinearity on a measure chain, J. of Math. 32 (2012) 9-16.

[134] X. Xu, J.X. Sun, Unbounded connected component of the positive solutions set of some semi-positone problems, Topol. Methods Nonlinear Anal. 37 (2011) 283-302.

[135] X. Xu, D. O' Regan, Structure of positive solutions sets of sub-linear semi-positone operator equations, Positivity 16 (2012) 603-618.

[136] R. P. Agarwal, D. O'Regan, Nonlinear boundary value problems on time scales, Nonlinear Anal. 44 (2001) 527-535.

[137] D. R. Anderson, Solutions to second-order three-point problems on time scales, J. Differen. Equ. Appl. 8 (2002) 673-688.

[138] D. R. Anderson, Existence of solutions for nonlinear multi-point problems on time scales, Dynamic Systems and Applications 15 (2006) 21-34.

[139] N. Aykut Hamal, Fulya Yoruk, Positive solutions of nonlinear m-point boundary value problems on time scales, J. Comput. Appl. Math. 231 (2009) 92-105.

[140] H. R. Sun, W. T. Li, Positive solutions for nonlinear three-point boundary value problems on time scales, J. Math. Anal. Appl. 299 (2004) 508-524.

[141] H. R. Sun, W. T. Li, Positive solutions for nonlinear m-point boundary value problems on time scales, Acta Mathematica Sinica 49 (2006) 369-380 (in Chinese).

[142] L. Erbe, J. Baoguo, A. Peterson, Belohorec-type oscillation theorem for second order sublinear dynamic equations on time scales, Math. Nachr. 284 (13) (2011) 1658-1668.

[143] Q.G. Zhang, X.P. He, H.R. Sun, Positive solutions for Sturm-Liouville BVPs on time scales via sub-supersolution and variational methods, Bound. Value Probl. 2013 (2013) 123.

[144] H. Luo, Positive solutions to singular multi-point dynamic eigenvalue problems with mixed derivatives, Nonlinear Anal. 70 (2009) 1679-1691.

[145] Q.L. Yao, Successive iteration and positive solution for nonlinear second-order three-point boundary value problems, Comput. Math. Appl. 50 (2005) 433-444.

[146] D.X. Ma, Z.J. Du, W.G. Ge, Existence and iteration of monotone positive solutions for multipoint boundary value problem with p-Laplacian operator, Comput. Math. Appl. 50 (2005) 729-739.

[147] B. Sun, C.M. Miao, W.G. Ge, Successive iteration and positive symmetric solutions for some Sturm-Liouville-like four-point p-Laplacian boundary value problems, Appl. Math. Comput. 201 (2008) 481-488.

[148] B. Sun, A.J. Yang, W.G. Ge, Successive iteration and positive solutions for some second-order three-point p-Laplacian boundary value problems, Mathematical and Computer Modelling 50 (2009) 344-350.

[149] Q.L. Yao, Monotone iterative method for a class of nonlinear second-order three-point boundary value problems, Numerical Mathematics: A Journal of Chinese Universities 25 (2003) 135-143 (in Chinese).

[150] Q.L. Yao, Existence and iteration of n symmetric positive solutions for a singular two-point boundary value problem, Comput. Math. Appl. 47 (2004) 1195-1200.

[151] Y.B. Sang, A class of φ-concave operators and applications, Fixed Point Theory Appl. 2013 (2013) 274.

[152] Z. Liang, W. Wang, S. Li, On concave operators, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) 22 (2006) 577-582.

[153] S.Y. Xu, B.G. Jia, Fixed-point theorems of ϕ-concave$(-\psi)$convex mixed monotone operators and applications, J. Math. Anal. Appl. 295 (2004) 645-657.

[154] S.Y. Xu, C.Y. Zeng, C.X. Zhu, Existence and uniqueness for the fixed points of ϕ-concave$(-\psi)$convex mixed monotone operators and applications, Acta Mathematica Sinica 48 (2005) 1055-1064 (in Chinese).

[155] C.B. Zhai, Fixed point theorems for a class of mixed monotone operators with convexity, Fixed Point Theory Appl. 2013 (2013) 119.

[156] C.B. Zhai, C. Yang, C.M. Guo, Positive solutions of operator equations on ordered Banach spaces and applications, Comput. Math. Appl. 56 (2008) 3150-3156.

[157] Z.Q. Zhao, Xinsheng Du, Fixed points of generalized e-concave (generalized e-convex) operators and their applications, J. Math. Anal. Appl. 334 (2007) 1426-1438.

[158] M. Abbas, B. Ali, W. Sintunavarat, P. Kumam, Tripled fixed point and tripled coincidence point theorems in intuitionistic fuzzy normed spaces, Fixed Point Theory Appl. 2012 (2012) 187.

[159] M. Abbas, W. Sintunavarat, P. Kumam, Coupled fixed point of generalized contractive mappings on partially ordered G-metric spaces, Fixed Point Theory Appl. 2012 (2012) 31.

[160] H. Aydi, M. Abbas, W. Sintunavarat, P. Kumam, Tripled fixed point of W-compatible mappings in abstract metric spaces, Fixed Point Theory Appl. 2012 (2012)134.

[161] T. Gnana Bhaskar, V. Lakshmikantham, Fixed point theorems in partially ordered metric spaces and applications, Nonlinear Anal. TMA 65 (7) (2006) 1379-1393.

[162] S. Chandok, W. Sintunavarat, P. Kumam, Some coupled common fixed points for a pair of mappings in partially ordered G-metric spaces, Mathematical Sciences 7 (2013) 24.

[163] D.J. Guo, Existence and uniqueness of positive fixed point for mixed monotone operators and applications, Appl.Anal. 46 (1992) 91-100.

[164] D.J. Guo, Fixed points for mixed monotone operators with application, Appl.Anal. 34 (1988) 215-224.

[165] J. Harjani, B. Lóopez, K. Sadarangani, Fixed point theorems for mixed monotone operators and applications to integralequations, Nonlinear Anal. TMA 74 (2011) 1749-1760.

[166] E. Karapinar, P. Kumam, W. Sintunavarat, Coupled fixed point theorems in cone metric spaces with a c-distance and applications, Fixed Point Theory Appl. 2012 (2012) 194.

[167] E. Karapinar, N.V. Luong, N.X. Thuan, Coupled coincidence points for mixed monotone operators in partially ordered metric spaces, Arab J Math 1 (2012) 329-339.

[168] Y.S. Wu, G.Z. Li, Existence and uniqueness theorems of fixed points for mixed monotone operators and their applications, Acta Math. Sinica (Chin. Ser.) 46 (1) (2003) 161-166 (in Chinese).

[169] C.B. Zhai, W.X. Wang, L.L. Zhang, Generalizations for a class of concave and convex operators, Acta Mathematica Sinica 51 (2008) 529-540 (in Chinese).

[170] C.B. Zhai, L.L. Zhang, New fixed point theorems for mixed monotone operators and local existence-uniqueness of positive solutions for nonlinear boundary value problems, J. Math. Anal. Appl. 382 (2011) 594-614.

[171] Z.T. Zhang, Fixed point theorems of mixed monotone operators and its applications, Acta. Math. Sincia 41 (6) (1998) 1121-1126 (in Chinese).

[172] Z.T. Zhang, New fixed point theorems of mixed monotone operators and applications, J. Math. Anal. Appl. 204 (1) (1996) 307-319.

[173] Z.Q. Zhao, Uniqueness and existence of fixed points on some mixed monotone mappings in ordered linear spaces, J. Systems Sci. Math. Sci. 19 (2) (1999) 217-224.

[174] W. Sintunavarat, P. Kumam, Coupled coincidence and coupled common fixed point theorems in partially ordered metric spaces, Thai Journal of Mathematics 10(3) (2012) 551-563.

[175] Y.X. Guo, Iterative solution on a class of nonlinear operator equation, Acta Analysis Functional Applicata 1 (1999) 45-50.

[176] J.X. Sun, Iterative solution of nonlinear operator equation (II), Journal of Shandong University, 3 (1992) 281-288(in Chinese).

[177] Y.B. Sang, Solvability of a higher-order three-point boundary value problem on time scales, Abstract and Applied Analysis, Volume 2009, ArticleID 341679, 16pages.

[178] K.L. Boey, P.J.Y. Wong, Existence of triple positive solutions of two-point right focal boundary value problems on time scales, Comput. Math. Appl. 50 (2005) 1603-1620.

[179] E. Cetin, S.G. Topal, High-order boundary value problems on time scales, J. Math. Anal. Appl. 334 (2007) 876-888.

[180] J.P. Sun, Existence of solution and positive solution of BVP for nonlinear third-order dynamic equation, Nonlinear Anal. 64(2006) 629-636.

[181] E. Cetin, S.G. Topal, Existence of multiple positive solutions for the system of higher order boundary value problems on time scales, Math. Comput. Modelling 52 (2010) 1-11.

[182] W. Han and S. Kang, Multiple positive solutions of nonlinea third-order BVP for a class of p-Laplacian dynamic equation ontimescales, Math. Comput. Modelling 49 (2009) 527-535.

[183] D.R. Anderson, J. Hoffacker, Existence of solutions to a third-order multi-point problem on time scales. Electron. J. Differential Equations, 107(2007) 1-15.

[184] W. Han, M. Liu, Existence and uniqueness of a nontrivial solution for a class of third-order nonlinear p-Laplacian m-point eigenvalue problems on time scales, Nonlinear Anal. 70(2009) 1877-1889.

[185] D.R. Anderson, G. Smyrlis, Solvability for a third-order three-point BVP on time scales. Math. Comput. Modelling 49 (2009) 1994-2001.

[186] L.G. Hu, Positive solutions to singular third-order three-point boundary value problems on time scales, Math. Comput. Modelling 51 (2010) 606-615.

[187] D.R. Anderson, R.I. Avery, An even-order three-point boundary value problem on time scales, J. Math. Anal. Appl. 291 (2004) 514-525.

[188] D.R. Anderson, I.Y. Karaca, Higher-order three-point boundary value problem on time scales, Comput. Math. Appl. 56 (2008) 2429-2443.

[189] İ. Yaslan, Existence results for an even-order boundary value problem on time scales, Nonlinear Anal. 70 (2009) 483-491.

[190] J.P. Sun, A new existence theorem for right focal boundary value problems on a measure chain, Applied Mathematics Letters 18 (2005) 41-47.

[191] Q.L. Yao, Several existence results of some nonlinear third-order ordinary differential equations, Pure and Applied Mathematics, 19 (2003) 248-252(in Chinese).

[192] Q.L. Yao, Several sufficient conditions of solvability for a nonlinear second-order three-point boundary value problem, Chinese Journal of Engineering Mathematics, 21 (2004) 1029-1032(in Chinese).

[193] Y.B. Sang, Some new existence results of positive solutions to an even-order boundary value problem on time scales, Abstract and Applied Analysis, Volume 2013, ArticleID 314382, 9pages.

[194] İ. Yaslan, Existence of positive solutions for even-order m-point boundary-value problems on time scales, Electron. J. Differential Equations 2013 (2013) 1-12.

[195] R.I. Avery, J. Henderson , D. O'Regan, Four functionals fixed point theorem, Math. Comput. Modelling 48 (2008) 1081-1089.

[196] A. Dogan, J.R. Graef, L.J. Kong, Higher-order singular multi-point boundary value problems on time scales, Proceedings of The Edinburgh Mathematical Society 54 (2011) 345-361.

[197] İ. Yaslan, Higher order m-point boundary value problems on time scales, Comput. Math. Appl. 63(2012) 739-750.

[198] D.R. Anderson, R.I. Avery, Fixed point theorem of cone expansion and compression of functional type, J. Difference Equations Appl. 8 (2002) 1073-1083.

[199] W.G Ge, C.Y. Xue, Some fixed point theorems and existence of positive solutions of two-point boundary value problems, Nonlinear Anal. 70 (2009) 16-31.

[200] M. Zima, Fixed point theorem of Leggett-Williams type and its application, J. Math. Anal. Appl. 299 (2004) 254-260.

[201] G.W. Zhang, J.X. Sun, T. Zhang, Fixed point theorem of domain compression and expansion of convex functional type, Acta Mathematica Sinica, Chinese Series, 51 (2008) 517-522.

[202] G.W. Zhang, J.X. Sun, A generalization of the cone expansion and compression fixed point theorem and applications, Nonlinear Anal. 67 (2007) 579-586.

[203] J.A. Cid, D. Franco, F. Minhós, Positive fixed points and fourth-order equations, Bull. London Math. Soc. 41 (2009) 72-78.

[204] J.R.L. Webb, G. Infante, Positive solutions of nonlocal boundary value problems: a unified approach, J. London Math. Soc. 74 (2) (2006) 673-693.

[205] J.R.L. Webb, K.Q. Lan, Eigenvalue criteria for existence of multiple positive solutions of nonlinear boundary value problems of local and nonlocal type, Topol. Methods Nonlinear Anal. 27 (2006) 91-116.